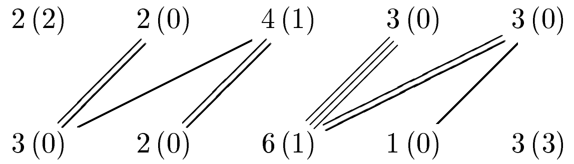
Комбинаторика массивов и диаграмм.

Терминология Мы фиксируем упорядоченные множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$ и называем *массивом* прямоугольную таблицу $a = \big(a(i,j)\big)$ с $a(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, расположенную в клетках первой координатной четверти с горизонтальной осью I и вертикальной осью J. Числа $a(i,j)$ интерпретируются как количества шариков, разложенные по ящикам в соответствии с двумя группами признаков. С каждым массивом связаны: *I-вес* $w_I = \big(\sum_j a(1,j), \sum_j a(2,j), \dots, \sum_j a(n,j)\big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, *$J$-вес* $w_J = \big(\sum_i a(i,1), \sum_i a(i,2), \dots, \sum_i a(i,m)\big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ и *строчная развёртка* представляющая собою столбец выровненных по левому краю слов в котором j-тое считая сверху слово имеет вид

$$\underbrace{11\dots1}_{a(1,j)}\underbrace{22\dots2}_{a(2,j)}\dots\dots\dots\underbrace{nn\dots n}_{a(n,j)}.$$

Например, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1&0\\\hline 0&4&0&0&0\\\hline 3&1&0&0&1\\\hline\end{array} \leadsto \begin{array}{llllll}1&1&1&2&5\\2&2&2&2\\3&4\\5\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\\hline 0&2&1&1&0\\\hline 0&1&0&2&3\\\hline 1&1&2&0&1\\\hline\end{array} \leadsto \begin{array}{llllll}1&1&3&3&3&5\\2&2&3&4\\2&4&4&5&5&5\\1&2&3&3&5\end{array}$. Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$ и центрально симметрично отражать относительно середины таблицы: $a^t(i,j) \overset{\text{def}}{=} a(j,i)$ и $a^*(i,j) \overset{\text{def}}{=} a(n+1-i, m+1-j)$.

На множестве всех массивов действуют четыре набора операторов D_j, U_j, L_i, R_i. Операции D_j и U_j могут действовать тождественно, а могут изменить j-ю и $(j+1)$-ю строки переместив ровно один шар, соответственно, на клетку вниз или на клетку вверх. Перемещаемый шар определяется из *устойчивого паросочетания* между j-той и $(j+1)$-ой строкой, которое устанавливается так: будем последовательно перебирать шарики в $(j+1)$-ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-той строке, либо объявлять свободными. Пусть очередной шарик $ш$ лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в строке j *строго левее* i--того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар $ш$ объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары в j-той строки, не являющиеся ничьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример устойчивого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров)



(4)

По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-ой строчке нет. Аналогично, операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-ой строки или ничего не делает, если в j-ой строке нет свободных шаров. Горизонтальные операции R и L определяются транспонированным образом: $L_i(a) = \big(D_i(a^t)\big)^t$, $R_i(a) = \big(U_i(a^t)\big)^t$. Массив называется плотным вниз (соотв. влево, вправо, вверх) если все операции D_j (соотв. L_i, R_i, U_j) действуют на него тождественно. Массив называется *биплотным*, если он плотен одновременно и вниз и влево. *DU-множеством* называется всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U. DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, будем называть *DU-орбитой*.

A8◇1°. Равносильны следующие три условия на массив a:

а) строчная развёртка a является таблицей Юнга; **б)** a плотен вниз;

в) $a(1,j+1) + a(2,j+1) + \dots + a(i,j+1) \leqslant a(1,j) + a(2,j) + \dots + a(i-1,j)\ \forall\, i \in I,\ j \in J$.

A8◇2°. Покажите, что биплотные массивы a взаимно однозначно соответсвуют диаграммам Юнга $w_I(a) = w_J(a)$.

A8◇3. Покажите, что все вертикальные операции D_j, U_j перестановочны со всеми горизонтальными операциями R_i, L_i.

A8◇4. Покажите, что множество всех массивов $\mathscr{M} = \mathscr{D} \underset{\mathscr{B}}{\times} \mathscr{L}$ представляет собою расслоенное произведение множества плотных вниз массивов $\mathscr{D}$ на множество плотных влево массивов $\mathscr{L}$ над множеством биплотных массивов $\mathscr{B}$.

A8◇5. Покажите, что плотные влево массивы взаимно однозначно соответсвуют таблицам Юнга из не более чем n строк на алфавите I.

A8◇6. Покажите, что всякий гомоморфизм[1] между двумя DU-орбитами либо биективен, либо вторая орбита состоит из одной точки.

A8◇7. Покажите, что всякое DU-множество является объединением непересекающихся орбит.

A8◇8 (функции Шура). Сопоставим каждому массиву a моном

$$x_J^a \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\sum_i a(i,1)} x_2^{\sum_i a(i,2)} \cdots x_m^{\sum_i a(i,m)} \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]\,,$$

а каждому DU-множеству массивов A — *полином Шура* $s_A(x) = \sum\limits_{a \in A} x_J^a \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$. Обозначая через s_j, s_{j+1} количества свободных шаров в j-й и $(j+1)$-й строках при устойчивом паросочетании между ними рассмотрим на произвольном DU-множестве операции $\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j}$, где D_j^{-n} при $n \in \mathbb{N}$ понимается как U_j^n. Верно ли, что

а) операции σ_j задают на множестве мономов x_J^a действие симметрической группы $\mathfrak{S}_m = \mathrm{Aut}\,(J)$

Указание. Покажите, что операции σ_i коммутируют с циклическими перестановками столбцов массива, что вместе с левыми уплотнениями сводит проверку соотношения треугольника $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$ к массивам формата 1×3.

б) полиномы Шура являются симметрическими

в) $s_A \cdot s_B = \sigma_{A \otimes B}$, где множество массивов $A \otimes B$, по определению, образовано всеми массивами вида ab (к таблице a приписали справа таблицу b) с $a \in A$, $b \in B$.

A8◇9 (правило Литлвуда – Ричардсона). Для данной диаграммы Юнга λ с не более чем m строками обозначим через $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$ полином Шура DU-орбиты биплотного диагонального массива $a(i,i) = \lambda_i$. Покажите, что $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu$, где суммирование происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а *коэффициент Литтлвуда – Ричардсона* $c^\nu_{\lambda\mu}$ равен количеству заполнений доплнительных клеток $\nu \smallsetminus \lambda$ μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., таких что числа, как и в таблице Юнга, строго возрастают вдоль столбцов, нестрого возрастают вдоль строк, но при этом слово, получающееся при прочтении вписанных цифр строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше чем троек и т. д. для каждой пары символов[2] i, $i+1$.

A8◇10 (форма массива). Диаграмма Юнга, задающая вес биуплотнения заданного массива a называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Покажите, что форма не зависит от выбора биуплотнения и не изменяется при центральной симметрии: $\Phi(a) = \Phi(a^*)$.

A8◇11* (выравнивание чумов). Свяжем с каждым массивом a частичный порядок на множестве $M = M(a)$ всех его шаров, полагая что один шар строго больше другого, если обе его координаты строго больше. Будем называть *цепью* чума M любое его линейно упорядоченное подмножество, а *антицепью* — любое подмножество состоящее из попарно несравнимых элементов. Подмножество $N \subset M$, называется k-антицепью, если его можно покрыть k антицепями. Максимальные длины k-антицепей чума M образуют возрастающую последовательность $\alpha_k(M)$. Её разностная последовательность $\delta_k(M) = \alpha_k(M) - \alpha_{k-1}(M)$ называется *формой* чума M. Покажите, что форма чума $M(a)$ совпадает с формой массива[3] a.

Указание. Докажите, что обе вертикальные операции D_j, U_j не уменьшают элементов последовательности δ_k (это делается отдельно для первого члена последовательности δ_1, отвечающего максимальной длине 1-антицепи, а потом каждая k-антицепь распутывается в объединение k непересекающихся 1-антицепей). Это даёт инвариантность формы чума относительно уплотняющих операций.

---

[1] т. е. отображение, перестановочное с действием всех операций D_j и U_j

[2] например, слово 1212312 годится, а 1212321 — нет

[3] в частности, является диаграммой Юнга, что отнюдь не очевидно *a priori* и составляет содержание довольно трудной комбинаторной теоремы, доказанной Грином и Фоминым в 70-х годах