Конструкция Шура и симметризаторы Юнга.

A7◇1. Торговец газировкой коротает время, манипулируя пятнадцатью пластмассовыми стаканчиками, сложенными перед ним на прилавке в несколько стопок. Он снимает из каждой стопки верхний стаканчик и составляет из них новую стопку.

а) Как разложатся стаканчики после 2006 таких манипуляций?

б*) Что изменится, если манипулировать тринадцатью стаканчиками?

Терминология Диаграмма Юнга λ, каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква из алфавита $[1..m] = \{1, 2, \dots, m\}$ называется *заполнением* формы λ в алфавите $[1..m]$ (буквы могут повторяться). Заполнение называется *стандартным*, если $m = |\lambda|$ совпадает с числом клеток и каждый символ встречается в таблице ровно один раз. С каждым стандартным заполнением S формы λ веса $n = |\lambda|$ свяжем две подгруппы $R_S, C_S \subset \mathfrak{S}_n$, состоящие, соответственно из всевозможных перестановок элементов заполнения, происходящих внутри строк и внутри столбцов диаграммы λ. Элементы

$$a_S = \sum_{\sigma\in R_S} \sigma\ , \quad b_S = \sum_{\sigma\in C_S} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\ , \quad c_S = a_S\cdot b_S$$

групповой алгебры $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ называются *симметризаторами Юнга*. Левый идеал $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_S$ называется *модулем Шпехта* и обозначается V_λ. Заполнение (в произвольном алфавите) называется *таблицей*, если его элементы строго возрастают сверху вниз вдоль каждого столбца и нестрого возрастают слева направо вдоль каждой строки. Каждой таблице T формы λ в алфавите $[1..m]$ сопоставим моном $x^T = \prod\limits_{i\in T} x_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$. Сумма таких мономов по всем таблицам заданной формы λ называется *многочленом Шура* $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$.

A7◇2°. Покажите, что при выборе другого заполнения S' формы λ получится изоморфное представление V_λ.

A7◇3. Верно ли, что **а)** $\varrho a_S = a_S\varrho = a_S \quad \forall\,\varrho \in R\ _S$; **б)** $\zeta b_S = b_S\zeta = \operatorname{sgn}(\zeta)\cdot b \quad \forall\,\zeta\in C\ _S$; **в)** $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_S = c_S\cdot\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$; **г)** $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot a_\lambda b_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot b_\lambda a_\lambda$;

A7◇4. Сравните представление $\mathfrak{S}_n$ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot a_\lambda$ и представление, индуцированное тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_S \subset \mathfrak{S}_n$, а также представление $\mathfrak{S}_n$ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot b_\lambda$ и представление, индуцированное знаковым представлением подгруппы $C_S \subset \mathfrak{S}_n$.

A7◇5 (основная комбинаторная лемма). Пусть стандартное заполнение S формы λ получается из стандартного заполнения U той же самой формы λ применением перестановки $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Покажите, что либо $\sigma = \varrho\zeta$ для неких $\varrho\in R_U$, $\zeta\in C_U$, либо какая-то пара элементов, лежавших в одной строке U, окажется в одном столбце S, и выведите из этого, что

$$\{\,\vartheta\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \mid \varrho\vartheta\zeta = \operatorname{sgn}(\zeta)\cdot\vartheta\ \forall\,\varrho\!\in\! R_U\ \ \forall\,\zeta\!\in\! C_U\,\}$$

является одномерным подпространством в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, натянутым на c_U.

A7◇6. Как связаны друг с другом модули V_λ и V_{λ^t}, отвечающие сопряжённым диаграммам Юнга?

A7◇7. Установите соответствие между модулями Шпехта групп $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$ и их неприводимыми представлениями группами многогранников.

A7◇8 (внешние степени симплициального представления). Вычислите характер симплициального представления[1] $\mathfrak{S}_n$ и выясните, приводимо ли оно.

[1] т. е. несобственной группой правильного n-мерного симплекса

а) Вычислите скалярный квадрат характера k-той внешней степени $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ тавтологического представления $\mathfrak{S}_n$ на $\mathbb{C}^n$ перестановками координат[2] и выведите из этого вычисления неприводимость всех внешних степеней симплициального представления симметрической группы[3].

б) Какой диаграмме Юнга[4]

А7◇9 (описание неприводимых $\mathfrak{S}_n$-модулей). Покажите, что что все модули Шпехта V_λ неприводимы, попарно неизоморфны при разных λ и доставляют набор неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_n$.

А7◇10. Введём на множестве диаграмм Юнга лексикографический порядок[5]. Докажите, что если $\lambda > \mu$, то $a_S \cdot \varphi \cdot b_U = 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ при любых стандартных заполнениях S, U формы λ и μ соответственно.

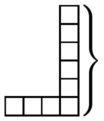
А7◇11. Покажите, что $c_S \cdot z \cdot c_S = m_\lambda c_S$ для любого стандартного заполнения S формы λ и любого $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, где константы $m_\lambda \in \mathbb{C}$ зависят только от формы λ и выведите отсюда, что $m_\lambda \cdot \dim V_\lambda = n!$.

А7◇12* (формула крюков[6]). Каждой клетке диаграммы Юнга можно сопоставить *крюк* — Г-образную поддиаграмму, образованную этой клеткой и всеми клетками снизу и справа от неё (стоящими в той же строке и соотв. в том же столбце). Покажите, что произведение $\dim V_\lambda$ и длин всех крюков диаграммы λ равно $n!$.

---

[2] подсказка:запишите элементы $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ матрицами в стандартном базисе $\{e_I\}$ пространства $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$, подставьте в формулу $(\chi, \chi) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(\sigma) \cdot \overline{\chi(\sigma)}$ явные значения $\chi(\sigma) = \sum_I \{\sigma\}_I$, где $\{\sigma\}_I = \begin{cases} \mathrm{sgn}\sigma|_I & \text{, если } \sigma(I) \subset I \\ 0 & \text{, если } \sigma(I) \subset I \end{cases}$, и аккуратно вычислите полученную сумму, имея в виду, что $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \{\sigma\}_I \{\sigma\}_J \neq 0\}$ представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus I \cap J$, $J \smallsetminus I \cap J$ и $[1..n] \smallsetminus I \cup J$

[3] подсказка: разложите внешнюю степень тавтологического представления в сумму подходящих внешних степеней симплициального представления

[4] ответ: диаграмме-крюку $k+1$  .

[5] т. е. $\lambda > \mu$, если первая сверху из отличающихся по длине строк длиннее у диаграммы λ

[6] по-английски: *hook lengths rule*