Индуцированные представления.

A5◇1. Сравните скалярное произведение (χ_U, χ_V) в $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ с $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(U, V)$.

A5◇2. Вычислите попарные скалярные произведения характеров представлений из зад. A4◇7, зад. A4◇9 и зад. A4◇10.

Индуцирование и ограничение. С подгруппой $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ связано расширение алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{H}] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{G}]$. Любой $\mathfrak{G}$-модуль W является одновременно $\mathfrak{H}$-модулем. В таком контексте его называют *ограничением* W с $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{H}$ и обозначают $\mathrm{Res}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(W)$. Наоборот, с любым $\mathfrak{H}$-модулем U можно связать пространство

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}[\mathfrak{G}] \underset{\mathbb{C}[\mathfrak{H}]}{\otimes} U \,,$$

представляющее собою фактор тензорного произведения векторных пространств $\mathbb{C}[\mathfrak{G}] \otimes U$ по подпространству порождённому векторами вида $(\varphi * h) \otimes u - \varphi \otimes h(u)$, где $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{G}]$, $h \in \mathfrak{H}$, $u \in U$. На $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U)$ есть естественное действие $\mathfrak{G}$ левыми умножениями, и оно называется *индуцированным* представлением.

A5◇3. Сравните представление $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U)$ с представлением группы $\mathfrak{G}$

а) в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(\mathbb{C}[\mathfrak{G}], U) = \{\mathfrak{G} \xrightarrow{\varphi} U \mid \varphi(hg) = h\varphi(g) \ \forall\, h \in \mathfrak{H},\ g \in \mathfrak{G}\}$ с действием, задаваемом по формуле $[g\varphi](x) = \varphi(xg)$;

б) в пространстве $W = U \oplus \cdots \oplus U$, прямые слагаемые которого нумеруются элементами $g_1, g_2, \dots, g_r \in \mathfrak{G}$, дающими полный набор левых смежных классов $g_1\mathfrak{H}$, $g_2\mathfrak{H}$, … , $g_r\mathfrak{H}$, и действие происходит по следующему правилу: условимся записывать вектор $w \in W$ как формальную сумму $\sum g_i \cdot u_i$, где g_i — фиксированные выше элементы, нумерующие смежные классы; для каждого $g \in \mathfrak{G}$ и любого i существуют единственные $h_{g,i} \in \mathfrak{H}$ и $j_{g,i} \in \{1, 2, \dots, r\}$, такие что $gg_i = g_{j_{g,i}} h_{g,i}$ (причём отображение $i \mapsto j_{g,i}$ является взаимно однозначной перестановкой индексов $\{1, \dots, r\}$); положим $g\left(\sum g_i \cdot u_i\right) = \sum g_{j_{g,i}} \cdot h_{g,i}(u_i)$.

A5◇4 (двойственность Фробениуса). Для произвольных $\mathfrak{H}$-модуля U и $\mathfrak{G}$-модуля W установите канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(U, \mathrm{Res}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(W)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U), W)$, переформулируйте его в виде «универсального свойства» представления $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U)$ и покажите, что $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U)$ определяется этим универсальным свойством однозначно с точностью до изоморфизма.

A5◇5. Покажите, что линейные операторы $Z\big(\mathbb{C}[\mathfrak{G}]\big) \underset{\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}}{\overset{\mathrm{Res}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}}{\rightleftarrows}} Z\big(\mathbb{C}[\mathfrak{H}]\big)$, переводящие характер в характер ограниченного (соотв. индуцированного) представления, сопряжены относительно стандартных скалярных произведений.

A5◇6. Выразите значение характера группы $\mathfrak{G}$, индуцированного тривиальным одномерным представлением подгруппы $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, на данном классе сопряжённости $C \subset \mathfrak{G}$ через $[\mathfrak{G} : \mathfrak{H}]$, $|C|$ и $|C \cap \mathfrak{H}|$.

A5◇7. Разложим пересечение класса сопряжённости $C \subset \mathfrak{G}$ с подгруппой $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ в объединение классов $\mathfrak{H}$-сопряжённости $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_s$. Выразите значение характера группы $\mathfrak{G}$, индуцированного произвольно заданным представлением U подгруппы $\mathfrak{H}$, через $[\mathfrak{G} : \mathfrak{H}]$, $|D_i|$ и $\chi_U(D_i)$.

A5◇8. Опишите $\mathfrak{S}_3$-модуль, индуцированный одномерным знакопеременным $\mathfrak{S}_2$-модулем.

A5◇9. Опишите $\mathfrak{S}_4$-модули, индуцированные **а)** двумерным неприводимым $\mathfrak{S}_3$-модулем;

б) одномерным $\mathbb{Z}/(4)$-модулем, в котором [1] действует умножением на $\sqrt{-1}$;

в) одномерным $\mathbb{Z}/(3)$-модулем, в котором [1] действует умножением на $e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$.

A5◇10. Опишите представления $\mathfrak{S}_5$, индуцированные со всех неприводимых представлений знакопеременной подгруппы.