Представления конечных групп

A4◇1°. Выразите через характеры χ_η и χ_ϱ представлений η и ϱ характер представления:
а) $\eta \oplus \varrho$; **б)** $\eta \otimes \varrho$; **в)** ϱ^*; **г*)** $\Lambda^n \varrho$; **д*)** $S^n \varrho$ (хотя бы для $n = 2, 3$).

A4◇2°. Пусть $\mathfrak{G}$ действует на $\mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов. Сравните значение характера этого представления на $g \in \mathfrak{G}$ с числом неподвижных точек перестановки g.

A4◇3. Пусть V — двумерное неприводимое представление $\mathfrak{S}_3$ (ср. с зад. A2◇9).
а) Верно ли, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R — это регулярное представление?
б) Опишите разложение всех $S^n(V)$ в сумму неприводимых представлений.
в) Опишите пространство $\mathfrak{S}_3$-инвариантных полиномов на V.
г) Вычислите характер всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.
д) Изоморфны ли $S^2(S^3(V))$ и $S^3(S^2(V))$? **е*)** А $S^k(S^m(V))$ и $S^m(S^k(V))$ $\forall\, k, m$?

A4◇4. Постройте эпиморфизм собственной группы куба на группу треугольника, опишите его ядро, вычислите характер возникающего таким образом 2-мерного представления $\mathfrak{S}_4$, и опишите прообраз в $\mathfrak{S}_4$ каждого класса сопряжённых элементов из $\mathfrak{S}_3$.

A4◇5. Опишите все неприводимые представления групп **а)** $\mathfrak{A}_4$ **б)** $\mathfrak{S}_4$ и разложите их (левые) регулярные представления на неприводимые.

A4◇6. Опишите как неприводимые представления $\mathfrak{S}_4$ раскладываются на неприводимые при ограничении на $\mathfrak{A}_4$.

A4◇7. Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве $\mathbb{C}$-значных функций на множестве его **а)** вершин **б)** рёбер **в)** граней.

A4◇8. На гранях куба написали числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$, как на игральном кубике. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел, стоящих на четырёх соседних гранях. Вычислите с точностью до второго знака после запятой, что будет написано на гранях после 2006 ходов. Изменится ли ответ, если числа расставить на гранях по-другому?

A4◇9. а) б) в) То же, что и зад. A4◇7, но для собственной и несобственной групп тетраэдра.

A4◇10. а) б) в) То же, но для собственной группы икосаэдра.

A4◇11. Как неприводимые представления $\mathfrak{S}_4$ раскладываются на неприводимые представления подгруппы $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$, вложенной в как стабилизатор 4-го элемента?

A4◇12. Опишите все неприводимые представления **а)** $\mathfrak{S}_5$ **б)** $\mathfrak{A}_5$, а также
в) как первые выражаются через вторые при ограничении.

A4◇13*. Опишите все конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения.

A4◇14. Составьте таблицы неприводимых характеров для группы:
а) восьми кватернионных единиц $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$; **б)** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/(3))$;
в) верхних треугольных матриц из $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/(3))$ с единицами по главной диагонали[1].

A4◇15*. Все ли неприводимые конечной группы встретятся среди разложений всевозможных тензорных степеней произвольно заданного эффективного[2] представления?

A4◇16*. Всегда ли размерность неприводимого представления делит порядок группы?

A4◇17*. Всякий ли неодномерный неприводимый характер зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости?

A4◇18. Зафиксируем какую-нибудь $\mathfrak{G}$-инвариантную эрмитову структуру и ортонормальный базис в каждом неприводимом представлении группы $\mathfrak{G}$, так что элементы g запишутся в этих базисах унитарными матрицами. Матричные элементы всех этих матриц образуют систему векторов в пространстве $\mathbb{C}^{\mathfrak{G}}$ всех $\mathbb{C}$-значных функций на $\mathfrak{G}$. Вычислите матрицу Грама этой системы векторов относительно канонического скалярного произведения $(g_1, g_2) = \mathrm{tr}\,(x \mapsto g_1 g_2 x)$ на $\mathbb{C}^{\mathfrak{G}}$ (след произведения в левом регулярном представлении).

[1] эта группа называется *группой Гейзенберга* $H(\mathbb{Z}/(3))$

[2] т. е. без ядра