Преобразование Фурье на конечной группе.

Преобразование Фурье сопоставляет каждому элементу $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{G}]$, рассматриваемому как функция $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathbb{C}$, семейство операторов $\widehat{\varphi}(\varrho) = \varrho(\varphi) \in \mathrm{End}(V_\varrho)$, каждый из которых действует на своём неприводимом представлении V_ϱ группы $\mathfrak{G}$ по правилу: $\widehat{\varphi}(\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in\mathfrak{G}} \varphi(g)\cdot\varrho(g)$. Отметим, что оно переводит свёртку функций (т.е. произведение в $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$) в композицию операторов. Всюду ниже $\mathrm{Irr}(\mathfrak{G})$ означает множество всех попарно неизоморфных неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$.

A$4\frac{1}{2}$◇1. Для заданных $g, h \in \mathfrak{G}$ выразите $\sum\limits_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{G})} \chi(g)\chi(h^{-1})$ через $|\mathfrak{G}|$ и число элементов классах сопряжённости C_g и C_h.

A$4\frac{1}{2}$◇2 (формула обращения). Покажите, что исходная функция φ на группе восстанавливается по своему преобразованию Фурье $\widehat{\varphi}$ при помощи *обратного преобразования Фурье*:

$$\varphi(g) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|}\sum_{\varrho\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{G})} \dim(V_\varrho)\cdot \mathrm{tr}\left(\varrho(g^{-1}\circ\widehat{\varphi}(\varrho)\right)$$

A$4\frac{1}{2}$◇3. Докажите *формулу順 Планшереля*: $\sum\limits_{g\in\mathfrak{G}} \varphi(g^{-1}\psi(g) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|}\sum\limits_{\varrho\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{G})} \dim(V_\varrho)\cdot\mathrm{tr}\left(\widehat{\varphi}(\varrho)\circ\widehat{\psi}(\varrho)\right)$.

A$4\frac{1}{2}$◇4 (оригинальная теория Фробениуса). Теория характеров была создана Фробениусом в конце XIX в., когда он, занимаясь модными в те годы детерминантными тождествами, натолкнулся на следующий вопрос о разложении определителя на множители. Пусть имеется конечная группа $\mathfrak{G}$ порядка n, элементы которой рассматриваются как индексы для набора независимых переменных x_g. Обозначим кольцо многочленов от этих переменных через $K \simeq \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Рассмотрим $n\times n$-матрицу, у которой в пересечении g-той строки и h-того столбца стоит переменная $x_{gh^{-1}}$. Обозначим через $F \in K$ определитель этой матрицы, умноженный на такую константу, что $F = 1$ при $x_e = 1$ и всех прочих $x_g = 0$ (где $e \in \mathfrak{G}$ — это единица), и рассмотрим в K разложение $F = \prod\limits_{\varrho} P_\varrho^{m_\varrho}$ в произведение степеней попарно различных неприводимых многочленов P_ϱ. Верно ли, что многочлены P_ϱ взаимно однозначно соответствуют неприводимым представлениям V_ϱ группы $\mathfrak{G}$ так, что $\deg P_\varrho = m_\varrho = \dim V_\varrho$ и значение неприводимого характера χ_ϱ на элементе g равно коэффициенту при $x_g x_e^{(\dim V_\varrho - 1)}$?

A$4\frac{1}{2}$◇5 (двойственность Понтрягина[1]). Назовём *характером* абелевой группы $\mathfrak{A}$ гомоморфизм групп $\mathfrak{A} \xrightarrow{\chi} \mathrm{U}(1) = \{z\in\mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\}$. Покажите, что

а) характеры образуют абелеву группу[2] $\widehat{\mathfrak{A}}$ по умножению и $\widehat{\widehat{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$;

б) прямое и обратное преобразования Фурье могут интерпретироваться как отображения

$$\mathbb{C}^{\mathfrak{A}} \xrightarrow{f\mapsto\widehat{f}} \mathbb{C}^{\widehat{\mathfrak{A}}} \xrightarrow{\varphi\mapsto\widehat{\varphi}} \mathbb{C}^{\widehat{\widehat{\mathfrak{A}}}} = \mathbb{C}^{\mathfrak{A}}$$

между кольцами $\mathbb{C}$-значных функций на $\mathfrak{A}$, $\widehat{\mathfrak{A}}$ и $\widehat{\widehat{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$.

в) Придумайте, как выглядят в аналитических терминах прямое и обратное преобразование Фурье, а также формула Планшереля для бесконечных групп $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}$ и $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$; покажите, что во втором случае преобразование Фурье переводит оператор дифференцирования d/dx в оператор умножения на x (где x — это координата на $\mathbb{R}$) и наоборот.

[1] на самом деле результаты этой задачи справедливы (и изначально были доказаны) для произвольных локально компактных абелевых топологических групп и непрерывных характеров, а собственно преобразование Фурье было изобретено для групп $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}$ и $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$, двойственными к которым являются группы $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathrm{U}(1)$ и $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ (характер $\mathbb{Z} \xrightarrow{\chi_\vartheta} \mathrm{U}(1)$, отвечающий $\vartheta \in \mathrm{U}(1)$, переводит $1 \in \mathbb{Z}$ в ϑ, а характер $\mathbb{R} \xrightarrow{\chi_t} \mathrm{U}(1)$, отвечающий $t \in \mathbb{R} = \widehat{\mathbb{R}}$, действует по правилу $\chi_t(x) = e^{2\pi i t x}$)

[2] она называется двойственной по Понтрягину к $\mathfrak{A}$