# $\mathfrak{sl}_2$-модули

**Алгебра Ли** $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \subset \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ состоит из всех бесследных $2 \times 2$-матриц. В качестве базиса $\mathfrak{sl}_2$ как векторного пространства над $\Bbbk$ математики обычно выбирают *матрицы Шевалле*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(определённые для любого $\Bbbk$), а физики — *матрицы Паули* (определённые только для $\Bbbk = \mathbb{C}$)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Представлением $\mathfrak{sl}_2$ в векторном пространстве $V$ называется $\Bbbk$-линейное отображение $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, переводящее коммутаторы в коммутаторы. Задание такого представления равносильно заданию трёх операторов $X, Y, H : V \longrightarrow V$, удовлетворяющих соотношениям $[X,Y] = H$, $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$. Пространство с тройкой таких операторов называется $\mathfrak{sl}_2$-*модулем*. Стандартный неприводимый $\mathfrak{sl}_2$ модуль $V_n = S^n\mathbb{C}^2$ размерности $n+1$ образован однородными многочленами степени $n$ от $x$, $y$ с операторами $X = x\,\frac{\partial}{\partial y}$, $\quad Y = y\,\frac{\partial}{\partial x}$, $\quad H = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}$.

**А3◇1°.** Напишите коммутационные соотношения на матрицы Паули.

**А3◇2°.** Как устроено представление $V_n^*$, двойственное[1] к $V_n$?

**А3◇3°.** Во всяком ли конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ операторы $X$, $Y$ нильпотентны, а $H$ и $\varkappa$ диагонализуем?

**А3◇4. Регулярное представление** $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ сопоставляет матрице $a \in \mathfrak{sl}_2$ оператор $\mathrm{ad}_a : y \longmapsto [a, y]$. Покажите, что $\mathrm{ad}_{[a,b]} = [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]$ для любых $a, b \in \mathfrak{sl}_2$.

**А3◇5 (форма Киллинга и оператор Казимира).** Вычислите матрицу Грама билинейной формы $(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b)$ на $\mathfrak{sl}_2$ (след берётся в $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$) в базисах Шевалле и Паули, выразите двойственные им базисы $X^*, Y^*, H^*$ и $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$, а также тензор $\varkappa \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$ через $X, Y, H$ и через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Верно ли, что

- **а)** $([a,b],c) + (b,[a,c]) = 0 \;\forall\, a,b,c \in \mathfrak{sl}_2$?
- **б)** в любом линейном представлении *оператор Казимира*, получающийся из $\varkappa$ заменой $\otimes$ на композицию, коммутирует со всеми операторами из $\mathfrak{sl}_2$?
- **в)** Опишите действие оператора Казимира на всех неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулях.

**А3◇6.** Пусть $\mathfrak{sl}_2$-модуль $V$ обладает $\mathfrak{sl}_2$-подмодулем $U \subset V$ коразмерности 1. Покажите, что $\mathfrak{sl}_2(V) \subset U$ и постройте в $V$ трансверсальный к $U$ вектор $v$, такой что[2] $\mathfrak{sl}_2(v) = 0$.

**А3◇7 (Разложение Клебша – Гордана).** Зададим действие $\mathfrak{sl}_2$ на тензорном произведении неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей $V_m \otimes V_n$ правилом $a(v \otimes w) = a(v) \otimes w + v \otimes a(w)$. Разложите $V_m \otimes V_n$ на неприводимые и выясните, при каких $m$, $n$ он содержит

**а)** тривиальное одномерное **б)** тавтологическое двумерное представления.

**А3◇8.** Разложите $S^2(V_3)$ в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей и сопоставьте результат с тем, что

- **а)** пространство квадрик $Q \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V_2)$ распадается в прямую сумму подпространства квадрик, содержащих кубическую кривую Веронезе, и некоторого дополнительного $\mathrm{SL}_2$-инвариантного подпространства (какого?)
- **б)** имеется каноническое $\mathrm{SL}_2$-эквивариантное квадратичное отображение Гессе из бинарных кубических форм в квадратичные $\mathrm{Hes} : f(t_0,t_1) \longmapsto \det\bigl(\partial^2 f / \partial t_i \partial t_j\bigr)$.

---

[1] действие $\mathfrak{sl}_2$ на $V^*$ определяется по действию на $V$ требованием, чтобы $\langle\, a\xi\,,\, v \,\rangle + \langle\, \xi\,,\, av \,\rangle = 0 \;\forall\, \xi \in V^*, v \in V$, $a \in \mathfrak{sl}_2$, где $\langle\, *\,,\, * \,\rangle$ обозначает свёртку вектора и ковектора

[2] ПОДСКАЗКА: используйте соотношение $\mathfrak{sl}_2(V) \subset U$; сначала рассмотрите случай $\dim U = 0, 1$; потом $U = V_n$ и вспомните про оператор $\varkappa$; наконец, в общем случае используйте индукцию по $\dim U$ и какое-нибудь $V_n \subset U$