Дальнейшие примеры групп, их действий и представлений

А2◇1. Перечислите классы сопряжённых элементов с указанием числа элементов в каждом классе для всех знакопеременных групп $\mathfrak{A}_n$ с $n \leqslant 6$.

А2◇2. Две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Перестановочны ли их элементы?

А2◇3° (полупрямые произведения). Пусть задан гомоморфизм $\sigma : \mathfrak{H} \xrightarrow{h \mapsto \sigma_h} \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{N})$ группы $\mathfrak{H}$ в группу автоморфизмов группы. Покажите, что пары (g, h) с $g \in \mathfrak{N}$, $h \in \mathfrak{H}$ образуют группу $\mathfrak{N} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ относительно операции $(g_1, h_1) \cdot (g_2 h_2) = g_1\, h_1 g_2 h_1^{-1}\, h_1 h_2 = \Big(g_1 \sigma_h(g_2)\,,\, h_1 h_2\Big)$, причём $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{N} \leftthreetimes \mathfrak{H})/\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$. Равносильно ли разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ наличию в $\mathfrak{G}$ подгрупп $\mathfrak{N}, \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, таких что $\mathfrak{N}$ нормальна, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H} = e$ и $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$?

А2◇4. Опишите все неизоморфные полупрямые произведения $\mathbb{Z}/(2) \leftthreetimes \mathbb{Z}/(4)$ и $\mathbb{Z}/(4) \leftthreetimes \mathbb{Z}/(2)$.

А2◇5. Опишите все группы порядка $\leqslant 10$.

Представления. Линейное представление $\varrho : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ в векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется *приводимым*, если $\mathfrak{G}(U) \subset U$ для некоторого ненулевого подпространства $U \subsetneq V$, и называется *разложимым*, если V разлагается в прямую сумму двух ненулевых $\mathfrak{G}$-инвариантных подпространств. Функция $\mathrm{ch}_\varrho : \mathfrak{G} \xrightarrow{g \mapsto \mathrm{tr}\,\varrho(g)} \Bbbk$ называется *характером* представления ϱ.

А2◇6. Верно ли, что в комплексном линейном представлении конечной группы все элементы группы представляются диагонализуемыми операторами?

А2◇7. Постройте приводимое неразложимое представление аддитивной группы $\mathbb{Z}$.

А2◇8. Для произвольного линейного представления группы треугольника $\mathfrak{S}_3$ выясните, какими могут быть собственные значения входящих в эту группу операторов и как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпространствах оператора, представляющего поворот. Перечислите все неприводимые представления группы треугольника и найдите их характеры.

А2◇9. Впишем правильный треугольник в единичную окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с координатой z так, чтобы одна из его вершин оказалась в точке $z = 1$, и отождествим единичную сферу, для которой эта окружность служит диаметральным сечением, с проективной прямой[1] $\mathbb{CP}_1$. Группа треугольника $\mathfrak{S}_3$ будет действовать на $\mathbb{CP}_1$ вращениями сферы. Эти вращения можно записывать дробно линейными заменами координаты[2] z.

а) Напишите явно все 6 дробно линейных замен из $\mathfrak{S}_3$.

б) Что за группа порождается заменами $z \mapsto z^{-1}$ и $z \mapsto (1 - z)$?

в) Найдите какую-нибудь непостоянную рациональную функцию, инвариантную относительно всех замен из предыдущих двух пунктов.

г*) Опишите все рациональные функции, инвариантные относительно $\mathfrak{S}_3$.

А2◇10. Обобщите предыдущие две задачи на все группы диэдра $\mathfrak{D}_n$, т. е. опишите

а) все неприводимые представления $\mathfrak{D}_n$ и их характеры;

б) дробно линейные замены координаты z на сфере Римана, отвечающие действию $\mathfrak{D}_n$;

в*) все рациональные функции от z, инвариантные относительно замен из $\mathfrak{D}_n$.

А2◇11. Вычислите характеры двух трёхмерных представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_4$: собственной группой куба и несобственной группой тетраэдра. Изоморфны ли эти представления?

А2◇12 (формула Молина). Для комплексного представления $\mathfrak{G} \xrightarrow{\varrho} \mathrm{GL}(V)$ обозначим через n_d размерность пространства $\mathfrak{G}$-инвариантных однородных полиномов[3] степени d на V. Выполняется ли в $\mathbb{Q}[[t]]$ тождество $\sum\limits_{d \geqslant 0} n_d \cdot t^d = |\mathfrak{G}|^{-1} \sum\limits_{g \in \mathfrak{G}} \det\big(E - t \cdot \varrho(g)\big)^{-1}$?

[1] при помощи стереографической проекции из северного полюса

[2] скажем, симметрии относительно оси OX будет соответствовать замена переменной $z \mapsto 1/z$

[3] т. е. таких $f \in S^d V^*$, что $\forall\, g \in \mathfrak{G}\;\; f(gv) = f(v)$ как функции от $v \in V$