Конечные группы

А1◇1. Всегда ли конечная мультипликативная подгруппа в поле — циклическая?

А1◇2. Равносильна ли инъективность отображения множеств наличию у него левого обратного, а сюрьективность — правого? А для гомоморфизма групп?

А1◇3. Каким бывает в (неабелевой) группе порядок элемента ba, если порядок ab равен n?

А1◇4. Какова чётность порядка произвольной нечётной перестановки?

А1◇5. Вычислите 100-ю степень перестановки $(1,2,3,4,5) \longmapsto (3,5,4,1,2)$.

Названия и обозначения. Группа всех движений пространства, переводящих в себя фигуру $\mathfrak{F}$ называется *собственной* или *несобственной группой* фигуры $\mathfrak{F}$, смотря по тому, допускаются ли при этом несобственные (т. е. меняющие ориентацию) движения. Группа правильного плоского n-угольника в трёхмерном пространстве называется *группой диэдра* и обозначается $\mathfrak{D}_n$. Группа «двуугольника[1]» $\mathfrak{D}_2$ называется также *четвертной группой Клейна* и обозначается $\mathfrak{V}_4$. Группа всех перестановок n элементов называется *симметрической* и обозначается $\mathfrak{S}_n$, а её нормальная подгруппа чётных перестановок называется *знакопеременной* и обозначается $\mathfrak{A}_n$.

А1◇6. Порождается ли **а)** $\mathfrak{S}_n$ циклами (12) и $(123\dots n)$ **б)** $\mathfrak{A}_n$ циклами $(12k)$ с $3 \leqslant k \leqslant n$?

А1◇7. Покажите, что классы сопряжённости в группе перестановок $\mathfrak{S}_n$ нумеруются диаграммами Юнга, и выразите число элементов класса через числа $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, где m_i есть количество строк длины i в соответствующей диаграмме.

А1◇8. Найдите порядок $|\mathfrak{D}_n|$ и все точки плоскости с нетривиальным стабилизатором в $\mathfrak{D}_n$.

А1◇9. Изоморфны ли: **а)** $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{D}_3$? **б)** $\mathfrak{S}_4$ и несобственная группа тетраэдра?

А1◇10. Найдите порядок стабилизатора вершины и порядок всей группы для собственных и несобственных групп пяти платоновых тел в $\mathbb{R}^3$.

А1◇11. Постройте геометрические изоморфизмы собственных групп:
а) тетраэдра с $\mathfrak{A}_4$; **б)** куба и октаэдра с $\mathfrak{S}_4$; **в)** икосаэдра и додекаэдра с $\mathfrak{A}_5$.

А1◇12. Изоморфна ли несобственная группа икосаэдра группе $\mathfrak{S}_5$?

А1◇13. Проверьте, что отображение $\mathfrak{G} \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$, сопоставляющее всякому $g \in \mathfrak{G}$ внутренний автоморфизм $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{G} \xrightarrow{h \mapsto ghg^{-1}} \mathfrak{G}$ является гомоморфизмом. Верно ли что внутраенние автоморфизмы составляют нормальную подгруппу в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$? Опишите центр $Z(\mathfrak{G})$ и группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ и $\mathrm{Ad}(\mathfrak{G}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ для следующих групп $\mathfrak{G}$:
а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для $n \leqslant 6$; **б)** $\mathfrak{D}_n$ для $n \leqslant 6$; **в)** $\mathfrak{S}_4$; **г)** $\mathfrak{A}_4$; **д)** $\mathfrak{A}_5$.

А1◇14. Сколько элементов $\mathfrak{S}_4$ неподвижны при сопряжении перестановкой $(12)(34)$?

А1◇15. Постройте эпиморфизм $\mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ и опишите его ядро.

А1◇16. Нормальна ли подгруппа, произведение любых двух левых смежных классов которой также представляет собой левый смежный класс?

А1◇17. Сравните число подгрупп, сопряженных данной подгруппе $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ с индексом её *нормализатора* $N(\mathfrak{H}) = \{g \in \mathfrak{G} \mid g\mathfrak{H}g^{-1} = \mathfrak{H}\}$. Покажите, что любая подгруппа, индекс которой равен наименьшему простому числу, делящему порядок группы (например, двум), нормальна.

А1◇18. Опишите все группы порядка **а)** шесть[2] **б)** пятнадцать.

А1◇19. Постройте эпиморфизм свободной группы с двумя образующими на группу диэдра $\mathfrak{D}_n$ и опишите его ядро (хотя бы для $n = 3, 4$).

А1◇20. Порождается ли $\mathfrak{D}_3$ двумя отражениями и каковы соотношения между ними?

А1◇21*. Тот же вопрос про симметрическую группу $\mathfrak{S}_4$ и три отражения[3].

А1◇22. Найдите порядок группы с образующими a, b и соотношениями $ab^2 = ba$, $ba^2 = ab$.

---

[1] т. е. «дольки»:

[2] подсказка: исследуйте наличие циклических подгрупп, их нормальность и действие друг на друге

[3] на самом деле, подобное описание имеется для всех групп $\mathfrak{S}_n$