§9. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм.

9.1. Вводные замечания. Комбинаторика, связанная с симметрическими функциями, таблицами Юнга и разложением пространства $V^{\otimes n}$ в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{S}_n \times \mathrm{GL}(V)$-модулей, обширна и традиционно считается трудной для понимания. Классическое её изложение, основанное на виртуозных манипуляциях с тождествами в кольце симметрических функций, имеется в книге: *И. Макдональд. Симметрические функции и многочлены Холла.* «Мир», 1985. Более современный подход, использующий красивые комбинаторные алгоритмы обработки текстов, найденные Кнутом, Робинсоном, Шенстедом и Шютценберже, имеется в книге: *У. Фултон. Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.* Изд. МЦНМО, 2006. Мы будем держаться третьей, совсем новой и самой прозрачной на сегодняшний день точке зрения, изложенной в статье *В. И. Данилов, Г. А. Кошевой. Массивы и комбинаторика таблиц Юнга.* УМН **60:2** (2005) с. 79–142. Этот параграф (местами почти дословно) следует этой замечательной работе.

9.2. Терминология. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из n и m элементов:

$$I = \{1, 2, \dots, n\}\,, \quad J = \{1, 2, \dots, m\} \tag{9-1}$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Такую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в декартовой системе координат, считая что элементы из I растут слева направо по горизонтальной оси, элементы из J растут снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i,j)$ клетки с координатами (i,j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое следует воспринимать как *количество* (или *массу*). Весь массив удобно представлять себе как набор одинаковых шариков, которые мы каким-то образом наделяем двумя группами признаков и в соответствии с этим раскладываем по ящикам. Мы никогда не будем *вычислять* с числами $a(i,j)$, но будем *перекладывать шарики* из ящика в ящик, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом a связан *столбцовый вес* (или I-*вес*)

$$w_I = \big(\sum_j a(1,j)\,, \sum_j a(2,j)\,, \dots\,, \sum_j a(n,j)\big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\,, \tag{9-2}$$

представляющий собой n-мерный целочисленный вектор, i-тая координата которого равна общему количеству шариков в i-том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или J-*вес*)

$$w_J = \big(\sum_i a(i,1)\,, \sum_i a(i,2)\,, \dots\,, \sum_i a(i,m)\big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}\,. \tag{9-3}$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \longmapsto a^t \quad \text{с} \quad a^t(i,j) = a(j,i)\,, \tag{9-4}$$

а также центрально симметрично отражать относительно середины таблицы:

$$a \longmapsto a^* \quad \text{с} \quad a^*(i,j) = a(n+1-i, m+1-j)\,. \tag{9-5}$$

Наконец, из массива можно пытаться построить таблицу Юнга из m строк, заполненную элементами алфавита I. Эту операцию мы будем называть *строчной развёрткой* массива. Заключается она в следующем: j-тую строку массива мы разворачиваем в слово[1]

$$\underbrace{11\dots1}_{a(1,j)}\underbrace{22\dots2}_{a(2,j)}\,\dots\dots\dots\,\underbrace{nn\dots n}_{a(n,j)}\,.$$

[1] иначе говоря, мы интерпретируем шарики в i-том столбце как букву i и последовательно выписываем эти буквы двигаясь слева направо вдоль j-той строки массива

и ставим это слово в качестве j-той (считая сверху[2]) строки создаваемой «таблицы Юнга». Например:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1&0\\\hline 0&4&0&0&0\\\hline 3&1&0&0&1\\\hline\end{array}
\;\rightsquigarrow\;
\begin{array}{lllll} 1&1&1&2&5\\ 2&2&2&2& \\ 3&4& & & \\ 5& & & & \end{array}\;,
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\\hline 0&2&1&1&0\\\hline 0&1&0&2&3\\\hline 1&1&2&0&1\\\hline\end{array}
\;\rightsquigarrow\;
\begin{array}{llllll} 1&1&3&3&3&5\\ 2&2&3&4& & \\ 2&4&4&5&5&5\\ 1&2&3&3&5& \end{array}\;.
$$

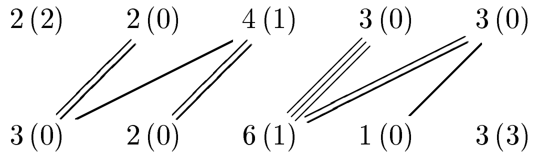
Видно, что получающиеся в результате строки хотя и являются нестрого возрастающими, но не образуют, вообще говоря, ни таблицу, ни даже диаграмму Юнга. Массивы, строчная развёртка которых является таблицей, называются *плотными вниз*, поскольку возникновение при строчной развёртке таблицы Юнга означает, что у каждого шарика i имеется партнёр в предыдущей строке — лежащий строго левее шарик, представляющий меньшую, чем i букву, которая должна будет занять в конструируемой таблице клетку над i. Это свойство можно выразить следующими неравенствами на массы:

9.2.1. ЛЕММА. *Массив $a = \big(a(i,j)\big)$ плотен вниз тогда и только тогда, когда для всех $i \in I$ и $j \in J$ выполняются неравенства:*

$$a(1,j+1)+a(2,j+1)+\ \cdots\ +a(i,j+1) \leqslant a(1,j)+a(2,j)+\ \cdots\ +a(i-1,j)\,. \qquad \square$$

9.3. Уплотняющие операции. На множестве всех массивов действуют четыре набора элементарных операций D_j, U_j, L_i, R_i (где $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$), каждая из которых либо не делает ничего, либо передвигает ровно один шарик ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right). Операции D_j и U_j действуют по вертикали в пределах соседних j-той и $(j+1)$-ой строки. Для их определения надо установить между j-той и $(j+1)$-ой строкой *устойчивое паросочетание*[3]. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шарики в $(j+1)$-ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-той строке, либо объявлять свободными. Пусть очередной шарик $ш$ лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в строке j *строго левее* i-того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар $ш$ объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары j-той строки, не являющиеся ничьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример устойчивого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



(9-6)

Из конструкции ясно, что все свободные шары j-той строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$-ой строки. По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-ой строчке нет. Аналогично, операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-той строки или ничего не делает, если в j-ой строке нет свободных шаров. Так, в предыдущем примере (9-6) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Ясно, что если операция D_j действует на массив a эффективно, операция U_j будет поднимать назад опущенный шар, т. е. в этом случае $U_j D_j a = a$. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$. Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ по формуле

$$a = U_{j_k} \cdots U_{j_1} \left(D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a) \right)$$

[2] как это принято в мире диаграмм

[3] по-английски: *stable matching*

при условии, что каждая буква D_j действует нетождественно. Мы будем называть такие D-слова *a-эффективными* (или просто *эффективными*, если понятно, о каком a речь).

Операции L_{i+1} и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i-м и $(i+1)$-м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е.

$$L_i(a) = \big(D_i(a^t)\big)^t\ , \quad R_i(a) = \big(U_i(a^t)\big)^t\ .$$

Ясно, что операции D, L не меняют столбцовый вес, а операции R, L не меняют строчный вес. Очевидно также, что последовательно применяя операции D, любой массив можно уплотнить вниз. Когда число строк $\geqslant 3$, такое уплотнение обычно можно осуществить многими способами — например:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array} \arrow[dl, "D_1"'] \arrow[dr, "D_2^3"] & \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 0&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \arrow[d, "D_2^4"'] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 4&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array} \arrow[d, "D_1^4"] \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 3&2\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \arrow[dr, "D_1^3"'] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&1\\\hline 5&2\\\hline\end{array} \arrow[dl, "D_2"] \\
 & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&2\\\hline 5&2\\\hline\end{array} &
\end{tikzcd} \tag{9-7}$$

Однако, результат уплотнения от способа уплотнения не зависит. Доказательство основано на следующем ключевом факте:

9.3.1. ЛЕММА О КОММУТИРОВАНИИ. *Все горизонтальные операторы U_i, R_i перестановочны со всеми вертикальными операторами D_j, L_j.*

Доказательство. Покажем, что D_j перестановочно с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара $ш$ на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между $(j+1)$-ой и j-той строкой. Ясно, что это так, когда $ш$ лежит вне этих строк.

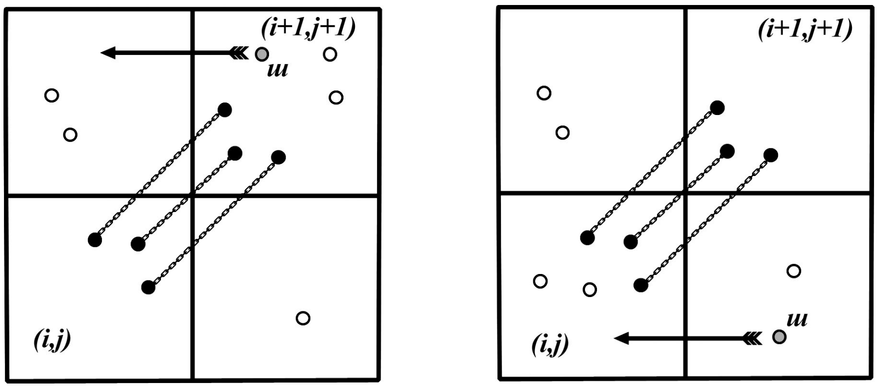


Рис. 9◇1. Горизонтальная операция L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Если $ш$ лежит в $(j+1)$-ой строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$ (левая картинка на рис. 9◇1), то все шары из клетки (i, j) в нашем паросочетании имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар $ш$ получил бы себе партнёра в клетке (i,j) при построении паросочетания i-того и $(i+1)$-го столбца. Поэтому если в строчном паросочетании у шара $ш$ был партнёр, то он был строго левее клетки (i,j), а значит и останется партнёром после перемещения $ш$ на клетку влево. А если партнёра у $ш$ не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении $ш$ строчное паросочетание не изменяется. Наконец, пусть $ш$ лежит в j-той строчке (правая картинка на рис. 9◇1). Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i+1,j+1)$ при столбцовом паросочетании имеют партнёров в клетке (i,j). Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i+1,j+1)$-той клетки получат партнёров в клетке (i,j). Поэтому перемещение шара $ш$ на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был). □

9.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Слово $L = L_{i_1}\cdots L_{i_k}$ тогда и только тогда эффективно действует на a, когда оно эффективно действует и на все массивы вида $D_{j_1}\cdots D_{j_\ell}(a)$.*

Доказательство. Можно считать, что $\ell = 1$, и достаточно разобрать случай $k = 1$. Если $L_i a = a$, то и $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i-тая компонента столбцового веса $w_I(L_i a)$ будет строго больше i-той компоненты $w_I(a)$. Т.к. D_j не меняет столбцовый вес, $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$. □

9.4. Уплотнение массивов. По аналогии с D-плотностью (плотностью вниз), будем называть массив L-, R- или U- плотным (т.е. плотным влево, вправо или вверх), если все уплотняющие операции соответствующего типа действуют на него тождественно.

Упражнение 9.1. Выразите условия L-, R- и U- плотности в виде неравенств на массы, аналогичных написанному в n° 9.2.1.

Как мы уже видели, массивы, плотные вниз, строчной развёрткой приводятся во взаимно однозначное соответствие с таблицами Юнга на алфавите I, имеющими не более m строк.

Плотность массива a влево, разумеется, можно охарактеризовать как плотность вниз транспонированного массива a^t, но часто бывает удобна следующая характеризация плотности влево в терминах строчной развёртки самого массива a:

Упражнение 9.2. Убедитесь, что массив a плотен влево тогда и только тогда, когда слово, которое получается при прочтении строчной развёртки a строку за строкой *справа налево* сверху вниз *в каждом* своём начальном куске содержит единиц не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для любой пары последовательных букв[4] $i, (i+1) \in I$.

Будем называть *биплотным* массив, который одновременно плотен и влево и вниз. В силу неравенств из n° 9.2.1 и транспонированных к ним, ненулевые массы в биплотном массиве могут располагаться только вдоль главной диагонали $i = j$ и должны нестрого убывать с ростом i, т. е. могут восприниматься как длины строк некоторой диаграммы Юнга. Тем самым, биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга[5] $\lambda = w_I(b) = w_J(b)$.

Применяя к произвольному массиву a достаточное число операций L и D, мы превратим его в биплотный массив. Соответствующая диаграмма Юнга называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Корректность этого понятия вытекает из следующего утверждения.

9.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Результат D-, L-, R- или U- уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.*

Доказательство. Рассмотрим случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то при действии на него операций D и U он, по лемме о коммутировании, останется плотным влево. В результате уплотнения вниз из такого массива получится биплотная диаграмма Юнга, длины строк которой образуют I-вес $w_I(a)$, который не меняется при вертикальных уплотняющих операциях. Поэтому в этом случае результат уплотнения не зависит от способа уплотнения. По аналогичным причинам результат уплотнения влево

[4]например, развёртка $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 \\ \cline{1-1} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array}$ годится, а $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$ — нет

[5]здесь и далее в этом параграфе мы будем понимать равенство неотрицательных целочисленных векторов как равенство с точностью до добавления любого числа нулевых координат справа (в частности, у «равных» векторов допускается разная размерность, скажем $(2,1,1) = (2,1,1,0,0,0)$)

любого плотного вниз массива также не зависит от способа уплотнения влево. Теперь для произвольного массива a рассмотрим любые два его уплотнения вниз Da и $D'a$, где $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$, $D' = D_{j'_1} \cdots D_{j'_{k'}}$, и любое слово $L = L_{i_1} \cdots L_{i_\ell}$, эффективно уплотняющее a влево. Поскольку операции D_j перестановочны с L и тождественно действуют на Da и на $D'a$, они тождественно действуют и на LDa и $LD'a$, т. е. массивы $LDa = DLa$ и $LD'a = D'La$ являются D-уплотнениями L-плотного массива La. По предыдущему, они совпадают: $LD'a = LDa$. По следствию n° 9.3.2 слово L действует на Da и $D'a$ эффективно, поэтому, умножая обе части равенства $LDa = LD'a$ на $R_{i_k} \cdots R_{i_1} = L^{-1}$, получаем $Da = D'a$. □

9.4.2. ТЕОРЕМА О БИЕКЦИИ. *Множество всех массивов $\mathscr{M}$ представляет собою расслоенное произведение $\mathscr{M} = \mathscr{L} \underset{\mathscr{B}}{\times} \mathscr{D}$ множества плотных влево массивов $\mathscr{L}$ на множество плотных вниз массивов $\mathscr{D}$ над множеством биплотных массивов $\mathscr{B}$, т. е. имеется универсальный декартов коммутативный квадрат вида* (7-1)*:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{M} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\mathscr{L} \arrow[dr, "D"'] & & \mathscr{D} \arrow[dl, "L"] \\
 & \mathscr{B} &
\end{tikzcd}
$$

где стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз соответственно.

Доказательство. По предыдущему, отображение $\mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{L} \underset{\mathscr{B}}{\times} \mathscr{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathscr{B}$, корректно определено. Проверим, что оно инъективно. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$. Выберем для $Da = Da'$ эффективное уплотняющее влево слово Λ. Тогда оно эффективно действует и на a, и на a'. Получаем: $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$. Проверим сюрьективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d), в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ, эффективно уплотняющее a_d влево до La_d. Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на La_d, а значит, и на a_ℓ. Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$, и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. □

9.4.3. Пример: графики отображений $I \xrightarrow{a} J$ — это массивы, в каждом столбце которых имеется ровно один шар. По предыдущей теореме они взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) с $Da_\ell = La_d$ и $w_I(a_d) = (1, 1, \dots, 1)$. Каждая такая пара являет собой следующий набор данных: диаграмма Юнга $\lambda = DLa = LDa$ веса $|\lambda| = n = \#I$ (форма массива a), *стандартная*[6] таблица Юнга формы λ (строчная развёртка D-уплотнения a_d), и какая-то таблица Юнга той же формы λ на алфавите J (строчная развёртка транспонированного L-уплотнения a_ℓ^t). В частности, если $\#J = \#I = n$, и мы рассматриваем только биективные отображения $I \xrightarrow{\sim} J$, т. е. массивы a, у которых оба веса

$$w_J(a_\ell) = w_J(a) = w_I(a_d) = w_I(a) = (1, 1, \dots, 1)\,,$$

мы получаем биекцию между элементами симметрической группы и парами стандартных таблиц одинаковой формы. При этой биекции инволютивные перестановки[7], отвечающие самосопряжённым массивам $a = a^t$, перейдут в пары одинаковых таблиц. Мы получаем

9.4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $d_\lambda(m)$ и d_λ обозначают, соответственно, число таблиц в алфавите $J = \{1, \dots, m\}$ и число стандартных таблиц формы λ. Тогда*

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = n^m\,, \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \quad \sum_\lambda d_\lambda = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 1\}\,,$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга[8]*.* □

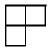
[6] напомним, что заполнение диаграммы Юнга λ называется *стандартным*, если заполняющий алфавит состоит ровно из $|\lambda|$ букв и каждая из них задействована ровно один раз

[7] т. е. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ с $\sigma^2 = 1$

[8] в первой сумме числа $d_\lambda(m)$ отличны отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк

9.5. DU-множества и DU-орбиты. Будем называть *DU-множеством* всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U. DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, будем называть *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U-словами. Мы будем называть a_d *нижним концом* орбиты O. Орбиты O_λ биплотных массивов λ называются *стандартными*.

Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме – таблице – массиву



$$ - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} $$

состоит из восьми массивов

$$
\begin{tikzcd}
 & & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\ \hline 1&0\\ \hline 0&0\\ \hline\end{array} & & \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\ \hline 0&0\\ \hline 1&0\\ \hline\end{array} \arrow[urr, "U_1"] & & & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\ \hline 2&0\\ \hline 0&0\\ \hline\end{array} \arrow[ull, "U_2"'] \\
 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\ \hline 0&1\\ \hline 1&0\\ \hline\end{array} \arrow[ul, "U_2"] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\ \hline 1&0\\ \hline 1&0\\ \hline\end{array} \arrow[ur, "U_1"'] & \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\ \hline 0&0\\ \hline 2&0\\ \hline\end{array} \arrow[urrr, "U_1"'] & & & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\ \hline 1&1\\ \hline 1&0\\ \hline\end{array} \arrow[ulll, "U_2"] \\
 & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\ \hline 0&1\\ \hline 2&0\\ \hline\end{array} \arrow[ull, "U_2"] \arrow[urr, "U_1"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{9-8}
$$

Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U. Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ, нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O. Вообще, DU-орбиты ведут себя как неприводимые модули, а DU-множества — как полупростые.

9.5.1. ЛЕММА. *Произвольный гомоморфизм DU-орбит $O' \xrightarrow{\varphi} O''$ либо биективен, либо орбита O'' состоит из одной точки*[9].

Доказательство. Поскольку нижний конец является единственным элементом орбиты, на который все D-операции действуют тождественно, нижний конец $a'_d \in O'$ переходит в нижний конец $a''_d \in O''$. Отсюда получается сюрьективность: $a'' = Ua''_d = U\varphi(a'_d) = \varphi(Ua'_d)$. Допустим, что нашлись два разных массива $a_1, a_2 \in O'$, такие что $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Тогда для любой операции D_j также будем иметь равенство $\varphi(D_j a_1) = \varphi(D_j a_2)$. Будем применять к обеим частям неравенства $a_1 \neq a_2$ всевозможные D-операции, до тех пор, пока оно будет оставаться неравенством, т. е. пока мы не получим пару элементов $a_1 \neq a_2$,

[9] т. е. массива, который плотен как вверх, так и вниз

такую что $D_ja_1 = D_ja_2$ для всех D_j. Это означает, что всякий оператор D_j эффективно действует на один из элементов a_1, a_2, который мы назовём a_e^j, и оставляет на месте другой, который мы назовём a_f^j. Тогда элемент $a'' = \varphi(a_e^j) = \varphi(a_f^j)$ остаётся на месте при действии всех операторов U_j, D_j, поскольку

$$D_ja'' = D_j\varphi(a_f^j) = \varphi(D_ja_f^j) = \varphi(a_f^j) = a''$$
$$U_ja'' = U_j\varphi(a_f^j) = U_j\varphi(D_ja_f^j) = U_j\varphi(D_ja_e^j) = \varphi(U_jD_ja_e^j) = \varphi(a_e^j) = a'' \,.$$

Тем самым, он является одновременно и верхним и нижним концом орбиты O''. □

9.5.2. ЛЕММА. *Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. В частности, всякое DU-множество распадается в дизъюнктное объединение DU-орбит.*

Доказательство. Не вполне очевидно лишь утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \smallsetminus A''$. Если $D_ja' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_jD_ja'$ тоже лежит в A''. □

Упражнение 9.3*. Покажите, что форма массива не меняется при центральной симметрии (9-5) : $\varPhi(a) = \varPhi(a^*)$, и выведите отсюда существование канонического изоморфизма между DU-орбитами любых двух центрально симметричных массивов a, a^* (он называется *инволюцией Шютценберже*).

9.6. Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_m = \mathrm{Aut}\,(J)$. На любом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу $\mathfrak{S}_m$, переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом. Пусть в j-той и $(j+1)$-ой строках после установления между ними устойчивого паросочетания образовалось, соответственно, s_j и s_{j+1} свободных шаров. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}} \,. \tag{9-9}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n-того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$). В частности, действие σ_j на строчный вес w_J состоит в перестановке j-той и $(j+1)$-ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \mathrm{Id}$, а также, что σ_j *коммутирует с циклическими перестановками столбцов*. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k-j| \geqslant 2$.

Таким образом, для того чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу $\mathfrak{S}_m$ остаётся проверить выполнение *уравнения треугольника*

$$\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1} \,.$$

Это достаточно сделать для трёхстрочного массива. Пользуясь уплотнениями влево L и цикличекими перестановками столбцов C мы редуцируем любой трёхстрочный массив в одностолбцовому:

$$\begin{array}{|c|}\hline * \; * \; * \\ \hline * \; * \; * \\ \hline * \; * \; * \\ \hline\end{array} \xmapsto{\;L\;} \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xmapsto{\;C\;} \begin{array}{|c|c|c|}\hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline\end{array} \xmapsto{\;L\;} \begin{array}{|c|c|c|}\hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xmapsto{\;C\;} \begin{array}{|c|c|}\hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline\end{array} \xmapsto{\;L\;} \begin{array}{|c|c|}\hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline\end{array}$$

для которого действие σ_j просто переставляет строки, и потому удовлетворяет соотношению треугольника.

9.7. Полиномы Шура. Будем интерпретировать все шарики j-той строки как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном, получающися перемножением всех шариков массива:

$$x^a = x_1^{w_J^1(a)} x_2^{w_J^2(a)} \cdots x_m^{w_J^m(a)}$$

(показатель у x_j равен j-той координате строчного веса $w_J(A)$). Суммируя мономы x^a по всем массивам из произвольного DU-множества M, мы получаем многочлен

$$s_M(x) = \sum_{a \in M} x^a \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] ,$$

который называется *многочленом Шура* DU-множества M. Поскольку симметрическая группа $\mathfrak{S}_m$ переставляет координаты весового вектора, она действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ с нижним концом в биплотном массиве подходящей формы λ, произвольный полином Шура является линейной комбинацией *стандартных* многочленов Шура

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \varPhi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x) , \tag{9-10}$$

в которой λ пробегает множество всех форм, встречающихся среди массивов из M, а коэффициент c_M^λ равен количеству входящих в M орбит, изоморфных O_λ (или числу всех D-плотных массивов J-веса λ в M).

Стандартная рбита O_λ образована всеми L-плотными массивами формы λ, которые взаимно однозначно соответствуют таблицам Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Таким образом,

$$s_\lambda(x) = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x^\eta = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \,\cdots\, x_m^{\eta_m} , \tag{9-11}$$

где $\eta \in J \otimes \mathbb{Z}_{\geqslant 0} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m$ пробегает m-мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda,\eta}$ равен числу таблиц формы λ, заполненных η_1 единицами, η_2 двойками, и т. д. (про такие таблицы говорят, что они имеют *состав* η). Число $K_{\lambda,\eta}$ называется *числом Костки*. Ясно, что все $K_{\lambda,\lambda} = 1$ и

$$K_{\lambda,\eta} \neq 0 \quad \iff \quad \lambda \trianglerighteq \eta \quad (\text{т. е. } \lambda_1 + \lambda_2 + \,\cdots\, + \lambda_j \geqslant \eta_1 + \eta_2 + \,\cdots\, + \eta_j \quad \forall\, j\,) \tag{9-12}$$

(отметим также, что число Костки $K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ есть число стандартных таблиц формы λ). Напрмер, при $m = 3$ из схемы (9-8) получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2\, x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 .$$

9.7.1. ТЕОРЕМА. *Стандартные многочлены Шура $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из $\leqslant m$ строк, образуют базис модуля симметрических многочленов $\Lambda_m \subset \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ над $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Орбиты симметрической группы на множестве всех мономов от $x_1, x_2, \dots, x_n$ взаимно однозначно параметризуются диаграммами Юнга λ из $\leqslant m$ строк, изображающими набор показателей лексикографически старшего монома орбиты:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \,\cdots\, x_m^{\lambda_m} , \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \,\cdots\, \geqslant \lambda_m . \tag{9-13}$$

Поскольку мономы любого симметрического многочлена f распадаются в объединение непересекающихся орбит, и все мономы одной орбиты входят в f с одним и тем же коэффициентом, f единственным образом записывается в виде целочисленной линейной комбинации *мономиальных симметрических многочленов* m_λ, представляющих собою сумму всех мономов из $\mathfrak{S}_m$-орбиты монома (9-13). Таким образом, мономы m_λ образуют базис модуля Λ_m над $\mathbb{Z}$. Согласно (9-11) и (9-12) лексикографически старший одночлен многочлена s_λ — это моном (9-13), входящий с коэффициентом единица. Поэтому система полиномов s_λ выражается через базис m_λ при помощи квадратной верхнетреугольной матрицы с единицами на главной диагонали $s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} \cdot m_\mu$, которая обратима над $\mathbb{Z}$. □

9.7.2. Пример: полные и элементарные симметрические многочлены. Полином Шура $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т.е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k,\,0,\,\cdots,\,0) = \underbrace{\square\square\cdots\square\square}_{k},$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$, поскольку для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно[10]. Симметричным образом, $s_{(1^k)}$, отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1,\,1,\,\cdots,\,1) = \left.\begin{matrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{matrix}\right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т.е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$. Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

9.7.3. Пример: тождества Коши и Шура. Роль алфавитов I и J можно сделать симметричной, если интерпретировать каждый шарик в клетке (i,j) массива a как элементарный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x_I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = y_J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a, мы получим (в обозначениях n° 9.7) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из n° 9.4.2 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x)\cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I\times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ. С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий

$$\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \left(1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \ \cdots\right) \ .$$

В самом деле, выбирая из (i,j)-того сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$ мы получаем в точности моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a. Таким образом мы приходим к *тождеству Коши*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)\cdot s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \tag{9-14}$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$ и извлечь из каждого a-монома корень

$$\xi^a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\xi^{a^t}\xi^a} = \sqrt{x^{a^t} y^a}|_{x=y=\xi} \ ,$$

то, суммируя по всем симметричным массивам a заданной формы λ, мы получим $\sigma_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum\limits_\lambda \sigma_\lambda(\xi)$. Тот же результат получится при раскрытии скобок в произведении прогрессий $\prod\limits_k \left(1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \ \cdots\right)\cdot \prod\limits_{i<j} \left(1 + \xi_i\xi_j + (\xi_i\xi_j)^2 + (\xi_i\xi_j)^3 + \ \cdots\right)$. Мы получаем *тождество Шура*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(\xi) = \prod_i \frac{1}{1-\xi_i}\cdot \prod_{i<j}\frac{1}{1-\xi_i\xi_j} \ . \tag{9-15}$$

9.8. Произведения. Произведение общих полиномов Шура $s_M(x)\cdot s_N(x)$ также является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n)\times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву[11]

[10] эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам

[11] при этом вертикальный J-алфавит не меняется, а горизонтальный I-алфавит заменяется дизъюнктным объединением I-алфавитов массивов a и b

$a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M, N. Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \Big(\sum_{a \in M} x^a\Big) \cdot \Big(\sum_{b \in N} x^b\Big) = \sum_{\substack{a \in M\\ b \in N}} x^{ab} = \sum_{c \in M \otimes N} x^c\,.$$

Формулу вида (9-10), раскладывающую произведение стандартных полиномов Шура $s_\lambda(x)$ по базису $s_\lambda(x)$, даёт знаменитая

9.8.1. ТЕОРЕМА (ПРАВИЛО ЛИТТЛВУДА – РИЧАРДСОНА). *Для любых диаграмм λ, μ*

$$s_\lambda(x) \cdot s_\mu(x) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu(x)\ ,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а коэффициент $c^\nu_{\lambda\mu}$ равен количеству заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., так что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \smallsetminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно слово, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (как в упр. 9.2).

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν. Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I-веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на[12] b , либо в её действии отдельно на[13] a. Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I-веса λ, μ. Таким образом, a' биплотен формы λ. Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν, то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \smallsetminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда–Ричардсона (первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab, а второе, «словестное», ограничение выражает, согласно упр. 9.2, плотность влево массива b'). □

Упражнение 9.4. Пользуясь правилом Литтлвуда–Ричардсона вычислите в Λ_3 произведения $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s_{2,1}^2$. В частности, убедитесь непосредственно, что в первом случае «честное» и «халявное[14]» вычисления приводят к одному и тому же результату[15].

Упражнение 9.5. Выведите из правила Литтлвуда-Ричардсона правила Пьери для умножения полиномов Шура на элементарные и полные симметрические многочлены:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_\mu s_\mu \tag{9-16}$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_\nu s_\nu \tag{9-17}$$

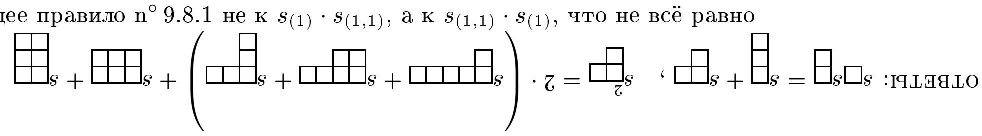
где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить присыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν.

9.8.2. Пример: ещё о полных и элементарных симметрических многочленах. Для каждого весового вектора $\eta \in \mathbb{Z}^r_{\geqslant 0}$ можно образовать многочлены $e_\eta = e_{\eta_1} e_{\eta_2} \cdots e_{\eta_r}$ и $h_\eta = h_{\eta_1} h_{\eta_2} \cdots h_{\eta_r}$ — произведения

[12] если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b, то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b

[13] если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab

[14] т. е. применяющее правило n° 9.8.1 не к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$, а к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$, что не всё равно

[15] 

многочленов $e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ из примера n° 9.7.2. По инерции, их тоже называют *элементарными* и *полными*. Многочлен

$$h_\eta = s_{(\eta_1)} s_{(\eta_2)} \cdots s_{(\eta_r)} = s_{O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \dots \otimes O_{(\eta_r)}}$$

есть многочленами Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \dots \otimes O_{(\eta_r)}$, и его разложение (9-10) по базису s_λ имеет вид

$$h_\eta = \sum_\nu K_{\nu,\eta} \cdot s_\nu \ , \tag{9-18}$$

поскольку орбиты формы ν в произведении одностолбцовых массивов с I-весами $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ взаимно однозначно соответствуют своим нижним концам — таблицам формы ν и содержания η. Многочлен

$$e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} s_{(1^{\eta_2})} \cdots s_{(1^{\eta_r})} = s_{O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{1^{\eta_2}} \otimes \dots \otimes O_{(1^{\eta_r})}}$$

отвечает DU-множеству $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \dots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$. Каждый массив в этом множестве имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1 a_2 \dots a_r$ ширины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j-номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i. При уплотнении вниз мы получим массив $a'_1 a'_2 \dots a'_r$ в котором все шары выстроены в несколько плотных цепочек, идущих параллельно диагонали $i = j$, так что в первом подмассиве a'_1 такая цепочка стартует из левого нижнего угла, а в каждом следующем либо продолжает предыдущую цепочку, либо начинает новую, опять таки, из левого нижнего угла. Таким образом, каждый подмассив a'_i привносит не более одного шара в каждую компоненту J-веса. Если суммарный J-вес при этом получится ν, то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a'_i, которые дают вклад в эту компоненту J-веса, мы получим таблицу содержания η и формы $\overline{\nu}$, *сопряжённой* к форме ν: номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν и неубывать по столбцам, и каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_\nu K_{\overline{\nu},\eta} \cdot s_\nu \ . \tag{9-19}$$

Отметим, что поскольку числа Костки (9-12) образуют треугольную матрицу с единицами по главной диагонали, из формул (9-19), (9-18) вытекает, что полные симметрические многочлены вида h_μ, где μ пробегает диаграммы Юнга из $\leqslant m$ строк, а также элементарные симметрические многочлены e_ν, где ν пробегает диаграммы Юнга из $\leqslant m$ столбцов, тоже образуют базисы $\mathbb{Z}$-модуля Λ_m.

Упражнение 9.6. Выведите разложения (9-19), (9-18) из формул Пьери (9-16), (9-17).

Упражнение 9.7. Проверьте непосредственным вычислением, что что матрица, составленная из координат многочленов e_μ, вес которых пробегает всевозможные диаграммы Юнга из $\leqslant m$ столбцов, в базисе из многочленов m_λ (где λ пробегает диаграммы из $\leqslant m$ строк) является треугольной с единицами по главной диагонали, точнее $e_\mu = m_{\overline{\mu}} + \sum\limits_{\substack{\nu < \overline{\mu} \\ \text{(лекс.)}}} \alpha^\nu_\mu m_\nu$, где $\alpha^\nu_\mu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.