§3. Пространства с операторами.

3.1. Терминология. Пусть на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ действует некоторое множество R линейных операторов $V \longrightarrow V$. В этой ситуации мы будем говорить, что V является *R-модулем*. Множество всех операторов, которые можно получить из R при помощи взятия конечных линейных комбинаций и композиций, образует ассоциативную подалгебру[1] $A_R \subset \mathrm{End}(V)$ в алгебре всех линейных операторов на V. Мы будем называть эту алгебру *ассоциативной оболочкой* множества операторов R.

Отметим, что вектор $v \in V$ является собственным или корневым вектором для всех операторов из R тогда и только тогда, когда он обладает этим свойством и по отношению ко всем операторам из A_R. Аналогично, для заданных двух подпространств $U, W \subset V$ выполнение условия $f(U) \subset W$ для всех $f \in R$ равносильно его выполнению для всех $f \in A_R$.

Подпространство $U \subset V$ называется *R-инвариантным* (или *R-подмодулем*), если $f(U) \subset U$ для всех операторов из R (и из A_R). R-модуль V называется *неприводимым* (или *простым*), если в нём нет R-инвариантных подпространств, отличных от нуля и самого V. R-модуль V называется *разложимым*, если он представляется в виде прямой суммы нетривиальных R-инвариантных подпространств. R-модуль V называется *вполне приводимым* (или *полупростым*), если он является прямой суммой неприводимых R-инвариантных подпространств.

3.1.1. Пример: пространство с одним оператором. Пусть множество R состоит из одного оператора f. Его ассоциативная оболочка $A_R \subset \mathrm{End}(V)$ является образом гомоморфизма

$$\mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \xrightarrow{t \mapsto f} \mathrm{End}(V) \tag{3-1}$$

и представляет собою алгебру многочленов от оператора f, т. е. изоморфна $\Bbbk[t]/(\mu_f)$, где μ_f — минимальный многочлен[2] оператора f. Поскольку над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой оператор имеет собственный вектор, неприводимость пространства V в этом случае равносильна условию $\dim V = 1$, а полупростота означает диагонализуемость оператора. В частности, имеется много приводимых, но не вполне приводимых пространств: например, 2-мерное координатное пространство $\Bbbk^2$ с оператором

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

В общем случае (над произвольным полем $\Bbbk$) гомоморфизм (3-1) наделяет пространство V структурой $\Bbbk[t]$-модуля: действие многочлена $\varphi(t) \in \Bbbk[t]$ на вектор $v \in V$ состоит в применении к вектору v оператора $\varphi(f)$. Инвариантность, разложимость, приводимость и полупростота относительно $R = \{f\}$, относительно A_R и относительно $\Bbbk[t]$ означают при этом одно и то же. По теореме о строении конечномерных $\Bbbk[t]$-модулей, пространство V можно отождествить с прямой суммой

$$\frac{\Bbbk[t]}{(\varrho_1^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(\varrho_2^{m_2})} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(\varrho_s^{m_s})} ,$$

где все многочлены $\varrho_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы, а действие оператора f состоит в умножении на t.

Упражнение 3.1. Пусть $\varrho \in \Bbbk[t]$ неприводим. Убедитесь, что пространство $\Bbbk[t]/(\varrho^m)$ с оператором умножения на t всегда неразложимо, но неприводимо тогда и только тогда, когда $m = 1$.

Таким образом, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно пространству $\Bbbk[t]/(\varrho)$ (где $\varrho \in \Bbbk[t]$ неприводим) с оператором умножения на t, а всякое неразложимое пространство изоморфно пространству вида $\Bbbk[t]/(\varrho^m)$.

Упражнение 3.2. Пусть на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$. Покажите, что $V = \ker \pi \oplus \mathrm{im}\, \pi$, причём π проектирует V на $\mathrm{im}\, \pi$ вдоль $\ker \pi$.

---

[1] напомним, что (ассоциативной) *алгеброй* над полем $\Bbbk$ называется векторное пространство над $\Bbbk$, наделённое структурой кольца (не обязательно коммутативного) так, что обе кольцевые операции $+, \cdot : V \times V \longrightarrow V$ являются *билинейными* отображениями

[2] т. е. многочлен $\mu(t)$ наименьшей степени и со старшим коэффициентом 1, такой что $\mu(f) = 0$

Упражнение 3.3. Докажите, что для диагонализуемости оператора над полем $\Bbbk$ необходимо и достаточно, чтобы он аннулировался каким-нибудь многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ на попарно различные линейные множители.

3.1.2. Пример: коммутирующие операторы. Если все операторы из R попарно коммутируют, то собственные подпространства любого оператора $f \in R$ будут R-инвариантны, поскольку для каждого $g \in R$ из соотношения $fv = \lambda v$ вытекает, что $fgv = gfv = g\lambda v = \lambda gv$. Отсюда, индукцией по $\dim V$, легко показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ все операторы из R имеют в V общий собственный вектор. В самом деле, это так, если $\dim V = 1$ или если все операторы скалярны. Если же хоть один из операторов $f \in R$ не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство $V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\}$ с $\dim V_\lambda < \dim V$ и $R(V_\lambda) \subset V_\lambda$. По индуктивному предположению в V_λ имеется общий для всех операторов из R собственный вектор. Аналогичное рассуждение показывает, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно диагонализовать одновременно в одном общем базисе — для этого надо разложить V в прямую сумму собственных подпространств какого-нибудь нескалярного оператора $f \in R$, это разложение будет R-инвариантно, и по индукции мы можем одновременно диагонализовать все операторы из R на каждом прямом слагаемом.

3.1.3. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем всякий простой модуль над произвольным множеством коммутирующих операторов одномерен.* □

3.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Всякое линейное представление конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем является прямой суммой одномерных представлений.*

Доказательство. Все операторы из конечной группы G аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1 = 0$ без кратных корней, и стало быть, диагонализуемы. Поскольку все они коммутируют, их можно диагонализовать одновременно. □

3.1.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ЛЕММА ШУРА I). *Пусть ненулевой линейный оператор $V \xrightarrow{f} V$ перестановочен со всеми операторами из некоторого множества $R \subset \mathrm{End}(V)$. Если пространство V неприводимо как R-модуль, то f изоморфизм. Если вдобавок основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ для некоторой ненулевой константы $\lambda \in \Bbbk$.*

Доказательство. Из перестановочности f со всеми операторами из R вытекает, что $\ker f$ и $\mathrm{im}\, f$ являются R-подмодулями в V и потому тривиальны. По условию, $\ker f \neq V$ и $\mathrm{im}\, f \neq 0$. Следовательно, $\ker f = 0$ и $\mathrm{im}\, f = V$, т. е. f биективен[3]. Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, f обладает ненулевым собственным подпространством. Поскольку оно R-инвариантно, оно совпадает со всем V. □

3.2. Модули над ассоциативными алгебрами. Зафиксируем некоторую абстрактную ассоциативную алгебру A над полем $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varrho : A \longrightarrow \mathrm{End} V$ называется *линейным представлением* алгебры A эндоморфизмами векторного пространства V, а само пространство V называется в этом случае A-модулем. В контексте A-модулей все введённые выше понятия: инвариантность, разложимость, простота и полупростота сохраняют свой смысл и означают инвариантность, разложимость и т. п. по отношению к множеству операторов $R = A_R = \varrho(A)$. Для $a \in A$ результат применения оператора $\varrho(a)$ к данному вектору $v \in V$ обычно обозначается просто через av (если понятно о каком представлении идёт речь или если это не существенно).

Линейное отображение $U \xrightarrow{\varphi} V$ между двумя A-модулями U и V называется *A-линейным* (или *гомоморфизмом A-модулей*), если оно перестановочно со всеми операторами из A, т. е. $f(au) = af(u)$ для всех $a \in A$ и $u \in U$. Совокупность всех A-линейных гомоморфизмов обозначается $\mathrm{Hom}_A(U, V)$. Оно образует подпространство в пространстве $\mathrm{Hom}(U, V)$. При $U = V$ A-линейных эндоморфизмы $\mathrm{End}_A(V) \subset \mathrm{End}(V)$ образуют ассоциативную подалгебру в алгебре всех автоморфизмов. Отметим, что A-модуль V является одновременно модулем и над этой подалгеброй.

Операции взятия прямой суммы векторных пространств и факторизации по подпространству также переносятся на A-модули. А именно, прямая сумма $U \oplus V$ двух A-модулей U, V

[3] отметим, что конечномерность V в этом рассуждении несущественна

наделяется структурой A-модуля по правилу $a(u,v)=(au,av)$. Если же $U\subset V$ является A-подмодулем в A-модуле V, то на фактор пространстве V/U корректно индуцируется действие A по обычному правилу $a[v\,(\mathrm{mod}\,U)\,]=[av]\,(\mathrm{mod}\,U)$.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом.

Упражнение 3.5. Пусть A-модуль W разложен в прямую сумму векторных подпространств $W=U\oplus V$, причём подпространство U является A-подмодулем. Докажите, что V тогда и только тогда являются подмодулем, когда проектор W на U вдоль V является A-гомоморфизмом.

3.2.1. СЛЕДСТВИЕ (ЛЕММА ШУРА II). *Если A-модули U и V неприводимы, то всякий ненулевой A-гомоморфизм $f\in\mathrm{Hom}_A(U,V)$ является изоморфизмом. Если вдобавок основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то*

$$\dim\mathrm{Hom}_A(U,V)=\begin{cases}0, \text{ если } U\ncong V\\ 1, \text{ если } U\cong V\,.\end{cases}$$

Доказательство. Поскольку f A-линеен, $\ker f\subset U$ и $\mathrm{im}\,f\subset V$ являются A-подмодулями. Если $f\neq 0$, то $\ker f\neq U$ и $\mathrm{im}\,f\neq 0$, откуда $\ker f=0$, $\mathrm{im}\,f=V$, т.е. f биективен. Если основное поле алгебраически замкнуто, то тождествляя U с V при помощи f и применяя предыдущую версию леммы Шура (см. n° 3.1.5), мы заключаем, что $\mathrm{Hom}_A(U,V)$ исчерпывается операторами вида λf с $\lambda\in\Bbbk$. □

3.3. Свойства полупростых модулей. Напомним, что A-модуль V называется *полупростым*, если он разлагается в прямую сумму простых A-модулей.

3.3.1. ЛЕММА (КРИТЕРИИ ПОЛУПРОСТОТЫ). *Следующие свойства конечномерного*[4] *A-модуля W попарно эквивалентны:*

1) *W полупрост;*

2) *W линейно порождается простыми подмодулями;*

3) *для любого A-подмодуля $U\subset W$ существует A-подмодуль $V\subset M$, такой что $W=U\oplus V$;*

4) *для любого A-подмодуля $U\subset W$ существует $\pi\in\mathrm{End}_A(W)$, такой что $\pi^2=\pi$ и $\mathrm{im}\,\pi=U$.*

Доказательство. Импликации (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) очевидны. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть W линейно порождается набором простых подмодулей V_α. Тогда для любого подмодуля $U\subsetneq W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1,V_2,\dots,V_m$, что $W=U\oplus V_1\oplus V_2\oplus\,\cdots\,\oplus V_m$. А именно, берём в качестве V_1 произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U (таковой существует, поскольку $U\neq W$ и W линейно порождается простыми подмодулями). Пересечение $V_1\cap U\neq V_1$, будучи подмодулем в V_1, равно нулю, так что сумма U и V_1 — прямая. Если $U\oplus V_1\neq W$, то повторяя рассуждение с заменой U на $U\oplus V_1$ выбираем следующий неприводимый подмодуль $V_2\not\subset U\oplus V_1$, и видим что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая, и т. д. пока возникающая таким образом прямая сумма не исчерпает всё пространство W, что и требуется. Отметим, что полагая в этом рассуждении $U=0$, мы получаем импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Наконец, свойства (3) и (4) эквивалентны: в условиях (3) проектор π на U вдоль W удовлетворяет условиям (4), и наоборот, в условиях (4) A-подмодули $U=\mathrm{im}\,\pi$ и $V=\ker\pi$ удовлетворяют условиям (3) в силу упр. 3.2. □

3.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.*

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом A-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами неприводимых подмодулей исходного модуля, а по лемме Шура образ неприводимого модуля либо нулевой, либо изоморфен ему самому (и тем самым, тоже неприводим). □

[4] требование конечномерности не является существенным, и преодолевается применением стандартной трансфинитной техники типа леммы Цорна

Упражнение 3.6. Покажите, что для любого векторного пространства V имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\,(V^{\oplus n}) \simeq \mathrm{Mat}_n\,(\mathrm{End}(V))$.

3.3.3. ТЕОРЕМА (ТЕОРЕМА ПЛОТНОСТИ[5]). *Для произвольных ассоциативной алгебры A и A-модуля V положим $B = \mathrm{End}_A(V)$. Если A-модуль V полупрост, то $\mathrm{End}_B(V) = A$.*

Доказательство. Поскольку все операторы из B, по определению, перестановочны с операторами из A, имеется тавтологическое включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$. Чтобы доказать обратное включение зафиксируем в пространстве V некоторый базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ подберём оператор $a \in A$, такой что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i (что влечёт равенство $\varphi = a$). Для этого образуем n-кратную прямую сумму

$$W = \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{n} \tag{3-2}$$

и обычным образом введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая

$$f\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = (f v_1, f v_2, \dots, f v_n)\,.$$

Рассмотрим в W вектор $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Нам надо показать, что $\varphi e \in A\,e$ для любого $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$. Поскольку W является полупростым A-модулем, A-подмодуль $A\,e \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора, т. е. $A\,e = \pi(W)$ для некоторого оператора $\pi \in \mathrm{End}_A(W)$ с $\pi|_{Ae} = \mathrm{Id}_{Ae}$. Если бы проектор π коммутировал с φ, мы бы имели $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in A\,e$, что и требуется.

Таким образом, нам достаточно показать, что $\pi \in \mathrm{End}_{\mathrm{End}_B(V)}(W)$. Для этого, представим действие эндоморфизма π на пространстве W матрицей (π_{ij}), (i,j)-тая компонента которой $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$ вычисляет i-тое слагаемое ограничения π на j-тое слагаемое разложения (3-2), т. е. запишем

$$\pi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left(\sum_\nu \pi_{1\nu} v_\nu\,,\ \sum_\nu \pi_{2\nu} v_\nu\,,\ \dots\,,\ \sum_\nu \pi_{n\nu} v_\nu \right)\,. \tag{3-3}$$

Подставляя в равенство $\pi(aw) = a\pi(w)$ вектор $w = (0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0)$, у которого j-тая координата равна $v \in V$, а остальные координаты нулевые, и пользуясь соотношением (3-3), мы получаем что все матричные элементы π_{ij} удовлетворяют соотношению $a\pi_{ij} = \pi_{ij} a$, т. е. $\pi_{ij} \in \mathrm{End}_A(V) = B$. Следовательно, $\pi \in \mathrm{Mat}_n(B)$ перестановочен с любой диагональной матрицей вида $\varphi \cdot E$, по диагонали которой стоит один и тот же элемент $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, как и утверждалось. $\square$

3.3.4. СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА БЕРНСАЙДА). *Если векторное пространство V над алгебраически замкнутым полем неприводимо над некоторым множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов:*

$$A_R = \mathrm{End}(V)\,.$$

Доказательство. По лемме Шура $\mathrm{End}_{A_R}(V) = \Bbbk$. По теореме плотности $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = A_R$. $\square$

[5] в англоязычной литературе называемая также *double commutator theorem*