Письменный домашний экзамен по курсу Алгебра - III

Порядок сдачи экзамена. Для получения оценки «отлично» заведомо достаточно набрать 66 баллов. Задачи решаются письменно и сдаются или в мой почтовый ящик в учебной части (комн. 301), или (если учебная часть закрыта) на вахту на первом этаже, с просьбой передать Ваше послание в учебную часть А. Л. Городенцеву. Приём работ заканчивается в пятницу, 23-го февраля в $17^{\underline{45}}$. Оценки, скорее всего, будут известны во второй половине дня во вторник, 27-го февраля. Удачи!

Задача 1. Пусть конечная группа $\mathfrak{G}$ транзитивно и эффективно действует на множестве X так, что стабилизатор Stab_x является максимальной по включению подгруппой в $\mathfrak{G}$. Покажите, что:

- **а) (10 баллов)** любая нетривиальная нормальная подгруппа $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{G}$ тоже действует на X транзитивно и $\mathfrak{G} = \mathrm{Stab}_x \cdot \mathfrak{H}$;
- **б) (10 баллов)** если $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ и Stab_x содержат абелевы нормальные подгруппы $\mathfrak{H}_x \lhd \mathrm{Stab}_x$, которые порождают $\mathfrak{G}$ (когда x пробегает X), то $\mathfrak{G}$ проста.

Задача 2 (10 баллов). Опишите классы сопряжённых элементов в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

Задача 3 (10 баллов). Есть ли в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_{5\times5}(\mathbb{R})$ ассоциативные $\mathbb{R}$-подалгебры, коразмерность которых (как вещественного векторного пространства) не более четырёх?

Задача 4 (10 баллов). Верно ли, что образ гомоморфизма алгебр Ли[1] $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ всегда содержится в $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$?

Задача 5 (10 баллов). Опишите кольца представлений всех неабелевых групп из восьми элементов (в частности, выясните, если среди этих колец неизоморфные).

Задача 6 (10 баллов). Верно ли, что неодномерный неприводимый характер конечной группы всегда где-то обращается в нуль?

Задача 7 (10 баллов). Для стандартного заполнения[2] T диаграммы Юнга λ веса n обозначим через $T(i,j)$ число, стоящее в j-той клетке i-той строки, и рассмотрим векторное подпространство $V_\lambda \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённое многочленами

$$F_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\gamma} \prod_{\alpha<\beta} \left(x_{T(\beta,\gamma)} - x_{T(\alpha,\gamma)} \right) \ ,$$

построенными по всевозможным стандартным заполнениям T. Покажите, что это подпространство инвариантно относительно действия симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ перестановками переменных и разложите его на неприводимые представления.

[1] т. е. линейного отображения, переводящего коммутатор в коммутатор; напомним, что $\mathfrak{gl}_m$ — это алгебра всех $m \times m$-матриц, а $\mathfrak{sl}_n$ — алгебра всех бесследных $n \times n$-матриц

[2] т. е. числами от 1 до $|\lambda|$ без повторений

Задача 8 (10 баллов). Пусть комплекс $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n$ включается в конечную по высоте коммутативную диаграмму вида

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \\
 & & & & & * \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[dd] & * \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & & \\
 & & & & * \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[dd] & * & \\
 & & & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & * \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[dd] & * & & \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
 & & & C_1 \arrow[r] \arrow[dd] & C_2 \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[dd] & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
 & & * \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[dd] & * & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & * \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[dd] & * & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & & & & & & \\
 * \arrow[r] & * \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] & * & & & & & \\
 \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & & &
\end{tikzcd}
$$

с точными строками и столбцами. Может ли он при $2 \leqslant i \leqslant (n-1)$ иметь ненулевые гомологии H_i, если самая верхняя и самая нижняя строчка в этой диаграмме нулевые и имеется по крайней мере пара ненулевых строк снизу или сверху от комплекса?