Диаграмный поиск

все задачи ниже об абелевых группах или модулях над произвольным кольцом (на Ваш вкус)

A9◇1. Какие из высказываний о коммутативном треугольнике $\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\gamma} & W \\ & {\scriptstyle\alpha}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\beta} & \\ & V & \end{array}$ верны[1]?

а) α, β эпи $\Rightarrow$ γ эпи **б)** α, β моно $\Rightarrow$ γ моно **в)** γ эпи $\Rightarrow$ α эпи **г)** γ эпи $\Rightarrow$ β эпи
д) γ моно $\Rightarrow$ α моно **е)** γ моно $\Rightarrow$ β моно **ж)** если α эпи, то γ эпи $\Longleftrightarrow$ β эпи
з) если α эпи, то γ моно $\Longleftrightarrow$ β моно **и)** если β эпи, то γ эпи $\Longleftrightarrow$ α эпи
к) если β эпи, то γ моно $\Longleftrightarrow$ α моно **л)** если γ изоморфизм, то α моно and β эпи.

A9◇2. Дана коммутативная диаграмма с точными[2] строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi''} & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1}$$

Верно ли, что **а)** φ изо $\Longleftrightarrow$ φ' моно & φ'' эпи **б)** φ', φ'' оба изо $\Rightarrow$ φ изо

A9◇3 (лемма о пяти гомоморфизмах). Дана коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccccc} V_1' & \longrightarrow & V_2' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_2'' & \longrightarrow & V_1'' \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2''} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1''} \\ W_1' & \longrightarrow & W_2' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W_2'' & \longrightarrow & W_1'' \end{array}$$

Гарантирует ли **а)** инъективность **б)** сюръективность **в)** биективность четырёх боковых стрелок φ_1', φ_1'', φ_2', φ_2'' наличие этого свойства и у центральной стрелки φ?

A9◇4. Верно ли, что всегда существует единственный морфизм $V' \xrightarrow{\varphi'} W'$, коммутативно вписывающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi''} & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками? Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы φ' был инъективен.

A9◇5. Тот же вопрос про диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

только теперь нужны условия для эпиморфности φ''.

A9◇6 (лемма о змее). Для всякой ли коммутативной диаграммы (1) с точными строками точна последовательность:

$$0 \longrightarrow \ker\varphi' \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \ker\varphi'' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi'' \longrightarrow 0\ .$$

[1] верные докажите, неверные опровергните примерами (как в этой задаче, так и во всех следующих)

[2] последовательность отображений $\cdots \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} \cdots$ *точной в* X, если $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$

Комплексы и когомологии. Последовательность гомоморфизмов

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

называется *комплексом*, если $d^{i+1} \circ d^i = 0\ \forall i$, и сокращённо обозначается $(K^\bullet, d)$. Отображения d в этом случае называются *дифференциалами*, а факторы $H^i = \ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1}$ называются *когомологиями*. Морфизм комплексов $(K^\bullet, d_K) \xrightarrow{\psi^\bullet} (L^\bullet, d_L)$ это набор отображений $K^i \xrightarrow{\psi^i} L^i$, перестановочных с дифференциалами: $d_L\psi = \psi d_K$. Ядро и образ морфизма комплексов определяются покомпонентно.

A9◇7°. Покажите, что: **а)** ядро и образ морфизма комплексов являются комплексами

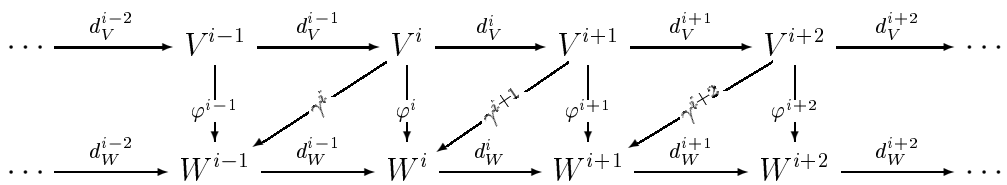
б) всякий морфизм комплексов $(K^\bullet, d_K) \xrightarrow{\psi^\bullet} (L^\bullet, d_L)$ корректно задаёт морфизм когомологий $H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\widetilde{\psi}^i} H^i(L^\bullet)$

в) (длинная последовательность когомологий) каждая короткая точная последовательность комплексов $0 \longrightarrow K'_\bullet \xrightarrow{\alpha'} K_\bullet \xrightarrow{\alpha''} K''_\bullet \longrightarrow 0$ порождает длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \longrightarrow H_i(K'_\bullet) \xrightarrow{\alpha'_*} H_i(K_\bullet) \xrightarrow{\alpha''_*} H_i(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(K'_\bullet) \xrightarrow{\alpha'_*} H_{i-1}(K_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

A9◇8° (эйлерова характеристика). Пусть ограниченный комплекс $V^\bullet$ имеет когомологии $H^\bullet$. Покажите, что $\sum(-1)^i \dim V^i = \sum(-1)^i \dim H^i$ (это число обозначается $\chi(V)$ и называется *эйлеровой характеристикой* комплекса $V^\bullet$).

A9◇9 (гомотопии). Морфизм комплексов $V^\bullet \xrightarrow{\varphi^\bullet} W^\bullet$ называется *стягиваемым* (или *гомотопным нулю*), если имеется последовательность отображений: $V^i \xrightarrow{\gamma^i} W^{i-1}$:



такая что $\varphi = d_W \circ \gamma + \gamma \circ d_V$ (она называется *стягивающей гомотопией*). Покажите, что если разность двух морфизмов $\varphi, \psi : V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ стягиваема (такие морфизмы называются *гомотопными*), то их действие на когомологиях одинаково: $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$.

A9◇10 (дифференциалы Кошуля и Де Рама). Рассмотрим векторное пространство V с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и обозначим через x_i и ξ_i класс базисного вектора e_i в симметрической и внешней алгебре соответственно. Отображения $d \stackrel{\text{def}}{=} \sum \xi_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ и $\partial \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu$

$$\Lambda^{k+1}V \otimes S^{m-1}V \xleftarrow{d} \Lambda^k V \otimes S^m V \xrightarrow{\partial} \Lambda^{k-1}V \otimes S^{m+1}V$$

называются *дифференциалами Де Рама* и *Кошуля*.

а) Зависят ли d и ∂ от выбора базиса? **б)** Вычислите $d\partial + \partial d$.

в) Покажите, что d перестановочен с умножением в $\Lambda^\bullet V$, имеет $d^2 = 0$, и вычислите когомологии *комплекса Де Рама*.

г) Покажите, что ∂ перестановочен с умножением в $S^\bullet V$, имеет $\partial^2 = 0$, и вычислите когомологии *комплекса Кошуля*.