Комплексные и вещественные структуры. Важный пример: $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ и кватернионы.

A5◇1°. Выясните, как связаны собственные числа $\mathbb{R}$-линейного оператора $V \xrightarrow{g} V$ на вещественном векторном пространстве с собственными числами его комплексификации $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{g_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$ и опишите действие g на вещественной линейной оболочке векторов $v_1, v_2 \in V$, таких что $v_1 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ собственен для $g_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

A5◇2°. Как связаны n собственных чисел $\mathbb{C}$-линейного оператора $W \xrightarrow{f} W$ на n-мерном комплексном векторном пространстве с $2n$ собственными числами индуцированного $\mathbb{R}$-линейного оператора $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} W_{\mathbb{R}}$ на овеществлённом пространстве?

A5◇3°. Установите взаимно однозначное соответствие между структурами комплексного векторного пространства на заданном вещественном векторном пространстве V (для которых V является овеществлением) и $\mathbb{R}$-линейными операторами $V \xrightarrow{I} V$ с $I^2 = -E$, и опишите для каждого такого оператора I канонический изоморфизм между комплексным векторным пространством V_I (с комплексной структурой, задаваемой I) и комплексным собственным $+i$-подпространством комплексифицированного оператора[1] $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$.

A5◇4°. Для данного n-мерного комплексного пространства W постройте взаимно однозначное соответствие между вещественными подпространствами $V \subset W_{\mathbb{R}}$, для которых $W = V_{\mathbb{C}}$ (равенство индуцируется тождественным оператором на пространстве W) и вещественно линейными операторами $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sigma} W_{\mathbb{R}}$, такими что $\sigma^2 = E$ и $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)\ \forall\, z \in \mathbb{C}$ и $\forall\, w \in W$.

Комплексные матрицы 2×2. На пространстве $M = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ имеются:

- эрмитово скалярное произведение $(A,B)_{\text{н}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(A \cdot B^*)$, для которого $(A,A)_{\text{н}} = \frac{1}{2}\sum |a_{ij}^2|$;
- $\mathbb{C}$-билинейное скалярное произведение $(A,B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(A \cdot B^{\vee})$, для которого $(A,A) = \det A$;
- вещественная структура $M \xrightarrow{\sigma} M$, такая что $(A,B)_{\text{н}} = (A, B^{\sigma})$.

A5◇5. Явно опишите действие всех трёх инволюций $*$, $\vee$ и σ на комплексную 2×2-матрицу[2] B, и убедитесь, что вещественное подпространство структуры σ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\ ,$$

а формы (A,B) и $(A,B)_{\text{н}}$ суть $\mathbb{C}$-билинейное и эрмитово продолжения евклидовой формы $\sum x_i^2$ на этом пространстве.

A5◇6. Укажите какой-нибудь ортогональный базис формы $\det$ с квадратами $(+1,-1,-1,-1)$.

A5◇7. Проверьте, что группа $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ действует на M по правилу $g_1 \times g_2\,(A) = g_1 A g_2^{-1}$, сохраняя квадратичную форму $\det$. Явно опишите получающийся таким образом гомоморфизм[3]

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{C})\ .$$

Найдите его ядро, образ, а также полный прообраз подгруппы $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$.

A5◇8. Проверьте, что группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ действует $\det$-ортогональными преобразованиями на 3-мерном подпространстве симметрических матриц из M по правилу $g(A) = gAg^t$. Выберите в

[1] обратите внимание, что *a posteriori* отсюда получаются соотношения $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = 2\,\dim_{\mathbb{C}} V_I$

[2] обратите внимание, что по построению инволюция $\vee$ $\mathbb{C}$-линейна, а обе инволюции $*$, σ $\mathbb{C}$−антилинейны

ответ для σ: $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \overline{b}_{22} & -\overline{b}_{21} \\ -\overline{b}_{12} & \overline{b}_{11} \end{pmatrix}$

[3] т. е. для пары матриц из SL_2 явно напишите отвечающую им матрицу из $\mathrm{SO}(4)$ в базисе из предыдущей задачи

этом подпространстве подходящий ортонормальный базис и напишите явно матрицу из SO_3, которой действует данная матрица[4] $g \in \mathrm{SL}_2$. Как устроены ядро и образ возникающего при этом гомоморфизма $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$? Каков будет прообраз у $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$?

А5◇9. Проверьте, что группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ действует det-ортогональными преобразованиями на 3-мерном подпространстве бесследовых матриц из M по правилу $g(A) = gAg^{-1}$. Выберете в этом подпространстве подходящий ортонормальный базис и напишите явно матрицу из SO_3, которой действует данная матрица $g \in \mathrm{SL}_2$. Как устроены ядро и образ возникающего при этом гомоморфизма $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$? Каков будет прообраз у $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$?

А5◇10. Проверьте, что базисные бесследовые косоэрмитовы матрицы[5]

$$\boldsymbol{i} \overset{\text{def}}{=} i\sigma_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{j} \overset{\text{def}}{=} i\sigma_1 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{k} \overset{\text{def}}{=} i\sigma_3 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\,,$$

удовлетворяют *соотношениям Гамильтона*:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1\,; \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}\,; \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}\,; \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}\,. \tag{1}$$

Как ограничиваются на 4-мерное вещественное подпространство, порождённое матрицами $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, эрмитова форма $(A,B)_{\text{H}}$ и $\mathbb{C}$-билинейная форма (A,B)? Чему соответствуют на языке 2×2 матриц норма кватерниона и кватернионное сопряжение? Как устроены (на языке матриц и топологически) пространства всех и всех чисто мнимых кватернионов нормы 1?

А5◇11. Верно ли, что любой кватернион является корнем некоторого квадратного уравнения с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом?

А5◇12. Опишите центр[6] тела кватернионов $\mathbb{H}$.

А5◇13. Верно ли, что для любого $q \in \mathbb{H}$ с $q^2 = -1$ множество кватернионов вида $\alpha + q\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ образуют в $\mathbb{H}$ подполе, изоморфное $\mathbb{C}$?

А5◇14 (чисто мнимые кватернионы). Обозначим через $I = \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\}$ пространство *чисто мнимых* кватернионов. Верно ли, что: **а)** $q \in I \Rightarrow q^2 \in \mathbb{R}$, $q^2 < 0$, и $\left(|q|^{-1}q\right)^2 = -1$? **б)** $q^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 0} \subset \mathbb{H} \Rightarrow q \in I$? **в)** все $x \in I$ с $x^2 = -1$ лежат на единичной сфере $(x,x) = 1$? **г)** $\mathbb{H} = \mathbb{R}\cdot 1 \oplus I$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$? **д)** $\mathbb{H} = \mathbb{R}\cdot 1 \oplus I$ как $\mathbb{R}$-алгебра? **е)** $\forall\ x, y \in I \Rightarrow (x,y) \overset{\text{def}}{=} (xy^* + yx^*)/2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ и задаёт на I евклидову структуру, причём *любой* ортонормальный базис I удовлетворяет соотношениям Гамильтона (1)? **ж)** I замкнуто относительно коммутаторов $[x,y] \overset{\text{def}}{=} xy - yx$, причём $[x,y]$ ортогонален к x и y, а $|[x,y]|$ есть площадь натянутого на x и y параллелограмма?

А5◇15. Обозначим через $U = \{\alpha \in \mathbb{H} \mid |\alpha| = 1\}$ единичную сферу в пространстве всех кватернионов, и для каждого $\alpha \in U$ рассмотрим $\mathbb{R}$-линейное отображение $\varphi_\alpha : \mathbb{H} \xrightarrow{q \mapsto \alpha^* q \alpha} \mathbb{H}$. Будет ли φ_α **а)** евклидовой изометрией I? **б)** автоморфизмом тела $\mathbb{H}$?

А5◇16. Каждое ли евклидово вращение пространства I из предыдущей задачи имеет вид φ_α для некоторого $\alpha \in U$?

[4] на проективно геометрическом языке такому действию отвечает линейная замена переменных в квадратичной форме от двух переменных; ясно, что всякая такая замена переменных сохраняет конику Веронезе

[5] упомянутые в формулах матрицы σ_i (получающиеся из $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ умножением на $-i$) называются *матрицами Паули* и часто используются физиками, поскольку составляют вместе с матрицей $\sigma_0 = E$ базис пространства эрмитово самосопряжённых матриц

[6] т. е. множество $\{c \in \mathbb{H} \mid qc = cq \ \ \forall\, q \in \mathbb{H}\}$