Евклидова геометрия

А4◇1. Пусть $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ аффинно независимы[1]. Найдите ГМТ равноудаленных от всех p_i. Вокруг всякого ли k-мерного симплекса можно описать $(k-1)$-мерную сферу и единственна ли она?

А4◇2 (куб). В стандартном n-мерном кубе $|x_i| \leqslant 1$ найдите:

а) количество осей и $(n-1)$-мерных плоскостей симметрии

б) количество диагоналей, ортогональных заданной диагонали

в) длину диагонали и ее предел при $n \to \infty$ **г)** радиус описанного шара

д) всевозможные углы между диагоналями и рёбрами, а также их пределы при $n \to \infty$

е) углы между диагоналями и всевозможными m-мерными гранями

ж) в каком отношении делят диагональ ортогональные проекции всех вершин

А4◇3 (симплекс). В стандартном n-мерном симплексе найдите:

а) радиусы вписанного и описанного шаров **б)** углы между любыми парами граней

в) расстояние между противоположными m и $(n-m-1)$-мерными гранями.

А4◇4. Задают ли следующие четыре формулы евклидовы структуры на $\mathbb{R}[x]$

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$ **б)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **в)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ **г)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$?

Сравните результаты ортогонализации стандартного мономиального базиса $\{x^\nu\}$ относительно этих произведений с многочленами Лаггера, Эрмита, Лежандра и Чебышева:

д) $L_n(x) = e^x \frac{d^n\left(e^{-x}x^n\right)}{dx^n}$ **е)** $E_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ **ж)** $P_n(x) = \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ **з)** $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

А4◇5. Найдите $\min \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx$ по всем $P \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg P \leqslant k$ и старшим коэффициентом 1.

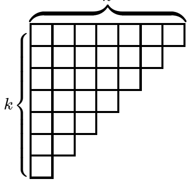
А4◇6. Найдите ближайший к $\sin x$ кубический многочлен в пространстве гладких функций на $[0,\pi]$ с евклидовой структурой $\displaystyle\int_0^{\pi} P(x)Q(x)\,dx$.

А4◇7. Является ли $\operatorname{tr}(AB^t)$ евклидовой структурой на пространстве вещественных квадратных матриц? Найдите ортогональное дополнение к подпространствам матриц:

а) бесследовых; **б)** симметрических; **в)** верхнетреугольных; **г)** кососимметрических.

А4◇8. 0-мерная ступенчатая пирамида — это точка. 1-мерная ступенчатая пирамида высоты k — это $\Pi_k^1 = \underbrace{\square\square\square\cdots\square\square\square}_{k}$. 2-мерная ступенчатая пирамида высоты k — это

$$\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1 =$$



.

Аналогично, n-мерная ступенчатая пирамида высоты k получается из k $(n-1)$-мерных ступенчатых пирамид убывающей высоты, поставленных в стопку вдоль n-той координатной оси: $\Pi_k^n = \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1}$. Сколько кубиков уйдёт на её постройку и как относится объем параллелепипеда к объему симплекса, натянутого на вершину и все соседние с ней вершины?

[1] т. е. не лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости

А4◇9. Выразите объем k-мерного симплекса через $(k-1)$-мерный объем его грани и длину опущенной на неё высоты.

Матрица Грама произвольной системы векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ — это квадратная матрица, составленная из всевозможных попарных произведений (v_i, v_j). Её определитель $\mathrm{G}(v_1, v_2, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} \det((v_i, v_j))$ называется *определителем Грама*.

А4◇10. Выразите объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_i через их определитель Грама.

А4◇11. Как связано расстояние d от конца вектора v до гиперплоскости, порожденной векторами $e_1, e_2, \dots, e_k$ с отношением $\mathrm{G}(v, e_1, \cdots, e_k)/\mathrm{G}(e_1, e_2 \cdots, e_k)$?

А4◇12. Верно ли, что точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ тогда и только тогда лежат на $(n-1)$-мерной сфере или гиперплоскости, когда $\Delta(p_0, p_1, \dots, p_n) \overset{\text{def}}{=} \det(|p_i p_j|^2) = 0$?

А4◇13. Верно ли, что точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ тогда и только тогда лежат в $(n-1)$-мерной гиперплоскости, когда зануляется определитель $\Gamma(p_0, p_1, \dots, p_n)$ порядка $(n+2)$, получающийся приписыванием к определителю $\Delta(P_0, P_1, \dots, P_k)$ из предыдущей задачи сверху и слева единичной строки, единичного столбца и нуля в левом верхнем углу.

А4◇14. Докажите, что квадрат радиуса шара, описанного вокруг симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ равен $-\frac{1}{2}\left(\Delta(p_0, p_1, \dots, p_n)/\Gamma(p_0, p_1, \dots, p_n)\right)$.

А4◇15. Свяжем с каждой выпуклой фигурой $K \subset \mathbb{R}^n$, содержащей некоторую окрестность нуля, но не содержащей прямых, функцию от вектора $v \in \mathbb{R}^n$ по правилу

$$|v|_K \overset{\text{def}}{=} \inf\{\lambda \geqslant 0 \mid \overrightarrow{v} \in \lambda \cdot K\}$$

и положим $\varrho_K(p,q) = |\overrightarrow{pq}|_K$. Докажите, что ϱ_K является однородной и инвариантной относительно сдвигов метрикой на $\mathbb{R}^n$, и приведите пример фигуры K, для которой эта метрика не будет индуцироваться никаким скалярным произведением. Каким фигурам отвечают метрики, индуцированные скалярными произведениями?

А4◇16. Рассмотрим евклидову метрику на $\mathbb{R}^n$ как функцию двух переменных

$$\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{(p,q) \mapsto \sqrt{(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq})}} \mathbb{R}\,.$$

Докажите, что она дифференцируема, и ее производная в точке (p,q) действует на касательный вектор $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ по формуле:

$$\varrho'(p,q)[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \frac{(\overrightarrow{pq}\,,\, \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})}{\varrho(p,q)} = |\overrightarrow{w}|\cos(\varphi) - |\overrightarrow{v}|\cos(\psi)\,,$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{w}$ и $\overrightarrow{pq}$, а ψ — между $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{pq}$.