Игры с квадриками и кониками

A2◇1. Покажите, что множество касательных плоскостей к невырожденной квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$ образует невырожденную квадрику в $\mathbb{P}_n^\times$ и выразите её матрицу Грама через матрицу Грама Q в двойственном базисе.

A2◇2. На евклидовой плоскости задана окружность C. Циркулем и линейкой постройте **а)** поляру точки, лежащей внутри C, **б)** полюс прямой, не пернесекающей C.

A2◇3. Сколько коник касается пяти заданных прямых на $\mathbb{P}_2$, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

A2◇4. Обозначим через $\ell_1^\times, \ell_2^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ два пучка прямых, проходящих через заданные точки $p_1, p_2 \subset \mathbb{P}_2$, и фиксируем ещё какие-нибудь точки $a, b, c \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы никакие три из пяти наших точек не были коллинеарны. Зададим линейный проективный изоморфизм $\ell_1^\times \xrightarrow{\gamma_{abc}} \ell_2^\times$ тем, что он посылает 3 прямые из $\ell_1^\times$, проходящие через a, b, c, в аналогичные 3 прямые из $\ell_2^\times$. Опишите ГМТ $\bigcup\limits_{\ell \in \ell_1^\times} \big(\ell \cap \gamma_{abc}(\ell)\big)$.

A2◇5. Напишите явное уравнение[1], задающее пучок коник, проходящих через точки $a = (1:0:0)$, $b = (0:1:0)$, $c = (0:0:1)$, $d = (1:1:1)$. Сколько в нём вырожденных коник?

A2◇6. Покажите, что два треугольника на $\mathbb{P}_2$ описаны около одной коники тогда и только тогда, когда они вписаны в одну конику.

A2◇7 (поризм Понселе для треугольников). Даны две коники $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2$. Из некоторой точки $p \in C_1$ восстановили касательную к C_1 до пересечения с C_2 в точках a, b, и затем провели из a, b по второй касательной к C_1. Покажите, что если эти две касательных пересекутся в точке[2] $c \in C_2$, то это произойдёт и при любом другом выборе исходной точки $p \in C_1$.

A2◇8. Покажите, что шестиугольник описан около коники тогда и только тогда, когда три его главных диагонали пересекаются в одной точке.

A2◇9. Зафиксируем рациональную параметризацию $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} Q$ невырожденной коники $Q \subset \mathbb{P}_2$. Покажите, что для любой биекции $Q \xrightarrow{\gamma} Q$, индуцированной линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$, существует две точки $p_1, p_2 \in Q$ и прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$, такие что $x \overset{\gamma}{\longmapsto} y \iff \pi_\ell^{p_1} x = \pi_\ell^{p_2} y$. Как найти неподвижные точки γ? Можно ли одной линейкой указать какие-нибудь p_1, p_2, ℓ, представляющие автоморфизм γ, заданный своим действием на некоторые три точки?

A2◇10*. Даны две прямые $\ell_1 . \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и линейный проективный изоморфизм $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$, переводящий некоторые три данные точки в другие три данные точки. Одной линейкой постройте образ произвольной точки при этом изоморфизме.

A2◇11*. Используя только линейку, написуйте треугольник, вписанный в данную невырожденную конику Q и такую, что его стороны a, b, c проходят через 3 заданные точки A, B, C. Сколько решений может иметь эта задача?

A2◇12*. Сформулируйте и решите задачу, проективно двойственную к предыдущей.

A2◇13. Обозначим через $\ell_1^\times, \ell_2^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$ два пучка плоскостей, проходящих через заданные прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$, и зафиксируем любые 3 неколлинеарные точки a, b, c так, чтобы никакие две из них не были компланарны ни с ℓ_1, ни с ℓ_2. Рассмотрим линейный проективный изоморфизм $\ell_1^\times \xrightarrow{\gamma_{abc}} \ell_2^\times$, переводящий 3 плоскости из $\ell_1^\times$, содержащие a, b, c, в аналогичные 3 плоскости из $\ell_2^\times$. Опишите ГМТ $\bigcup\limits_{\pi \in \ell_1^\times} \big(\pi \cap \gamma_{abc}(\pi)\big)$, если: **а)** $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$ **б)** $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \varnothing$.

A2◇14. Сколько прямых пересекает четыре данных попарно скрещивающихся прямых в **а)** $\mathbb{CP}_3$ **б)** $\mathbb{RP}_3$ **в)** $\mathbb{C}^3$ **г)** $\mathbb{R}^3$ (найдите все возможные ответы и укажите, какие из них устойчивы к малым шевелениям).

---

[1] т. е. квадратичную форму, коэффициенты которой линейно зависят от двух параметров

[2] так, что получится треугольник abc, вписанный в C_2 и описанный около C_1