Программа обязательного курса «Линейная алгебра и геометрия»

весна 2006, 1-й курс, 2-й семестр

1) Проективные пространства. Словарь «линеная алгебра — проективная геометрия»: линейные оболочки точек, проективные преобразования, индуцированные линейными операторами и их неподвижные точки, дополнительные подпространства, прямые разложения и проекции, счёт размерностей. Проективная двойственность. Топология маломерных пространств: $\mathbb{RP}_1 = S^1$, $\mathbb{RP}_2 =$ «лист Мёбиуса с заклеенной диском границей», $\mathbb{RP}_3 = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ и $\mathbb{CP}_1 = S^2$. Дробно-линейные преобразования прямой, двойное отношение, игры с плоскими кониками и построения одной линейкой.

2) Комплексные проективные квадрики. Ограничение квадрики на прямую: касательные прямые и касательные пространства. Геометрия квадрики: всякая квадрика является линейным соединением проективного пространства особых точек с неособой квадрикой в дополнительном подпространстве, описание линейных подпространств, лежащих на квадрике. Двойственная квадрика. Полярное преобразование относительно неособой квадрики (неособая квадрика как изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^*$). Пространство квадрик. Маломерные примеры: коника Веронезе $\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$, квадрика Сегре $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$, квадрика Плюккера $G(2,4) \hookrightarrow \mathbb{P}_5$ и гомоморфизмы $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ и $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$.

3) Аффинные пространства. Аффинная геометрия как срез проективной, сравнение однородных и локальных аффинных координат, барицентрические координаты и барицентры. Вещественная выпуклая геометрия: стандартные свойства выпуклых фигур, выпуклые многогранники и полиэдральные конусы, экстремумы линейных функций на многогранниках. Двойственность. Кубы, кокубы и симплексы. Вещественные аффинные квадрики.

4) Скалярные произведения и евклидова геометрия. Симметричные билинейные формы, матрицы Грама, ортогонализация. Евклидова геометрия: вычисление расстояний, углов объёмов и т. п. Ортогональная группа (над любым полем) порождается отражениями. Строение группы $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$, экспоненциальное отображение $\mathfrak{so} \to \mathrm{SO}$.

5) Линейная симплектическая геометрия. Вещественное пространство с симплектической формой. Строение группы Sp. Экспоненциальное отображение $\mathfrak{sp} \to \mathrm{Sp}$. Лагранжевы подпространства. Гамильтонов формализм.

6) Комплексные, вещественные и келеровы структуры. Унитарная геометрия. Комплексификация, овеществление, комплексная и вещественная линейность (условия Коши-Римана). Эрмитово скалярное произведение. Вычисление длин и углов. Метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{CP}_n$. Примеры унитарных пространств и унитарных операторов. Келеровы тройки (I, g, ω), условия Римана, зигелево полупространство модулей келеровых структур на симплектическом $\mathbb{R}^{2n}$.

7) Классические классификационные задачи линейной алгебры. Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением: диагонализация нормальных операторов в евклидовом и унитарном пространстве, канонический вид (анти) самосопряжённых операторов, полярное разложение. Полупростые и унипотентные операторы, разложение Жордана. Цикловой тип нильпотентного оператора. Одновременная диагонализация коммутирующих полупростых матриц, линейные представления тора, решётка характеров.

8) Тензорная алгебра векторного пространства. Тензорное произведение векторных пространств. Разложимые тензоры и многообразия Сегре. Двойственность и свёртки. Линейная оболочка тензора. Симметрическая и грассманова алгебры как факторы тензорной алгебры по двойственным коммутационным соотношениям, многообразия Веронезе, многообразия Грассмана и их явное задание квадратичными уравнениями. Поляризация (косо) коммутативных многочленов (в нулевой характеристике), изоморфизм $\left(\Lambda^k\right)^* \sim \Lambda^{\mathrm{top}-k}$ и «нечётное преобразование Фурье».

9) Алгебры Клиффорда и спинорная геометрия (если позволит время). Клиффордова алгебра квадратичной формы. Группа Spin и накрытие Spin $\twoheadrightarrow$ SO. Комплексные спиноры: спинорные модули над клиффордовой алгеброй и спинорные представления ортогональной группы. Четырёхмерные спиноры и кватернионы. А если время позволит ещё больше, то триальность в $\mathbb{P}_7$ и октавы.

10) Язык категорий. Категории и функторы. Естественные преобразования. Эквивалентность категорий. Категорные конструкции линейной алгебры, двойственность. Представимые функторы, лемма Ионеды. Пределы. Примеры пределов: p-адические числа, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, категория Δ и симплициальные пространства как предпучки на категории Δ.

11) Комплексы, дифференциалы, гомологии (по большей части как упражнения). Диаграмный поиск в категории абелевых групп, стандартные леммы о точных тройках (змеевидный гомоморфизм ker – coker и т. п.). Комплексы, гомологии, длинная последовательность гомологий, эйлерова характеристика, аддитивные функции. Комплексы как Λ-модули: кошулево правило знаков, тензорные произведения комплексов, Hom-комплексы и гомотопии. Комплексы Кошуля – Де Рама.