§13. Поляризация полиномов.

13.1. (Косо)симметрические тензоры. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах:

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) \stackrel{\text{def}}{=} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \qquad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Линейные оболочки *симметрических* и *кососимметрических* мономов обозначаются

$$\operatorname{Sym}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \quad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n \,\} \tag{13-1}$$

$$\operatorname{Skew}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot t \quad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n \,\} \tag{13-2}$$

и называются пространствами (косо) симметричных тензоров. Их не следует путать с симметрической и внешней степенями пространства V, которые являются *фактор пространствами* тензорной алгебры.

Упражнение 13.1. Зафиксируем в пространстве V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$. Убедитесь, что *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} = \begin{pmatrix} \text{сумма всех тензорных мономов, содержащих} \\ m_1 \text{ множителей } e_1,\ m_2 \text{ множителей } e_2,\ \dots,\ m_d \text{ множителей } e_d \end{pmatrix} \tag{13-3}$$

(где $\sum\limits_{\nu} m_\nu = n$) составляют базис в пространстве $\operatorname{Sym}^n V$, а *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} \tag{13-4}$$

составляют базис в пространстве $\operatorname{Skew}^n V$.

Обратите внимание, что суммы в правых частях (13-3) и (13-4) состоят, соответственно, из

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_d!} \qquad \text{и} \qquad n!$$

слагаемых, *каждое* из которых при проекции на симметрическую степень $S^m V$ (соответственно, на внешнюю степень $\Lambda^n V$) пространства V переходит в *один и тот же* базисный симметрический моном $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_d^{m_d}$ (соответственно, базисный грассманов моном e_I). Поэтому, если $\operatorname{char} \Bbbk = p$, то все симметрические тензоры, степень которых является степенью p, и все кососимметрические тензоры, степень которых больше p, спроектируются в нуль симметрической (соответственно, внешней) алгебры. В нулевой же характеристике мы получаем

13.1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если* $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, *то ограничение симметрического умножения*

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^n V$$

на подпространство симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ *и ограничение внешнего умножения*

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathfrak{a}_n} \Lambda^n V$$

на подпространство кососимметрических тензоров $\operatorname{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ *являются изоморфизмами векторных пространств.* □

13.2. Поляризация[1]**.** Обратные к изоморфизмам из предложения n° 13.1.1 отображения

$$\Lambda^n V \xrightarrow{\mathrm{pl}} \operatorname{Skew}^n V \qquad \text{и} \qquad S^n V \xrightarrow{\mathrm{pl}} \operatorname{Sym}^n V$$

[1] с этого места и до конца параграфа мы будем предполагать, что $\operatorname{char} \Bbbk = 0$

называются *полной поляризацией* (грассмановых) многочленов. Они вкладывают симметрическую и внешнюю степени в тензорную степень в качестве *подпространств*. Полными поляризациями базисных симметрических мономов являются кратности полных симметрических тензоров

$$\mathrm{pl}\left(e_1^{m_1} e_2^{m_2} \,\cdots\, e_d^{m_d}\right) = \frac{m_1!\, m_2! \,\cdots\, m_d!}{n!} \cdot e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \,, \tag{13-5}$$

а полными поляризациями базисных грассмановых мономов — кратности полных кососимметрических тензоров

$$\mathrm{pl}\,(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \,\cdots\, \wedge e_{i_n}) = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} \,. \tag{13-6}$$

Как мы видели в n° 12.5, (косо) симметрический тензор $\mathrm{pl}(f) \in V^{*\otimes n} = V^{\otimes n *}$ может рассматриваться как (косо) симметричная полилинейная форма

$$\underbrace{V \times V \times \,\cdots\, \times V}_{n} \xrightarrow{\widetilde{f}} \Bbbk \,.$$

Таким образом, полная поляризация взаимно однозначно сопоставляет многочленам $f \in S^n V^*$ (соотв. грассмановым многочленам $f \in \Lambda^n V^*$) симметричные (соотв. косые) полилинейные формы $\underbrace{V \times V \times \,\cdots\, \times V}_{n} \xrightarrow{\widetilde{f}} \Bbbk$.

Упражнение 13.2. Убедитесь, что в симметрическом случае полная поляризация $\widetilde{f} = \mathrm{pl}(f)$ может быть охарактеризована как *единственная* симметричная полилинейная форма

$$\underbrace{V \times V \times \,\cdots\, \times V}_{m} \xrightarrow{\widetilde{f}} \Bbbk \,,$$

такая что $\widetilde{f}(v, v, \dots, v) = f(v)\ \forall\ v \in V$, и проверьте, что полная поляризация симметрической квадратичной формы $q \in S^2 V^*$ описывается формулами (2-1).

Упражнение 13.3. Проверьте коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Skew}^{\,n} V & & \mathrm{Sym}^{\,n} V \\
& V^{\otimes n} \arrow[ul, "\mathrm{alt}_n"'] \arrow[ur, "\mathrm{sym}_n"] \arrow[dl, "\mathfrak{a}_n"'] \arrow[dr, "\mathfrak{s}_n"] & \\
\Lambda^n V \arrow[uu, "\mathrm{pl}"] & & S^n V \arrow[uu, "\mathrm{pl}"']
\end{tikzcd} \tag{13-7}$$

в которой через $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^n V$ и $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathfrak{a}_n} \Lambda^n V$ обозначены канонические проекции на симметрическую и внешнюю алгебру, а $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} \mathrm{Sym}^{\,n}(V)$ и $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{alt}_n} \mathrm{Skew}^{\,n}(V)$ суть отображения *симметризации* и *альтернирования*, действующие по правилам

$$\mathrm{sym}_n(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(t) \,; \qquad \mathrm{alt}_n(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(t) \,. \tag{13-8}$$

Упражнение 13.4. Убедитесь, что при $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$ полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует:

а) двойственность между пространствами $\mathrm{Sym}^{\,m} V$ и $\mathrm{Sym}^{\,m} V^*$, а также между изоморфными им пространствами $S^m V$ и $S^m V^*$, при которых стандартные базисы, получающиеся из двойственных базисов $\{e_\nu\} \subset V$ и $\{x_\nu\} \subset V^*$, спариваются по правилам:

$$\begin{aligned}
&\left\langle\, e_1^{m_1} e_2^{m_2} \,\cdots\, e_d^{m_d} \,,\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d} \,\right\rangle = \\
&= \left\langle\, e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \,,\, x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \,\right\rangle^{-1} = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \,\cdots\, \cdot m_d!}{m!}
\end{aligned} \tag{13-9}$$

(спаривания между всеми остальными парами базисных векторов нулевые);

б) двойственность между пространствами $\mathrm{Skew}^m V$ и $\mathrm{Skew}^m V^*$, а также между изоморфными им пространствами $\Lambda^m V$ и $\Lambda^m V^*$, при которых базисы спариваются по правилам:

$$\langle\, e_I \,,\, x_I \,\rangle = \langle\, e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_m\rangle} \,,\, x_{\langle i_1,i_2,\dots,i_m\rangle} \,\rangle^{-1} = \frac{1}{m!} \tag{13-10}$$

(спаривания между всеми остальными парами базисных векторов нулевые).

13.3. Поляры. Отображение свёртки по первому индексу

$$c_1^1 \;:\; V \times V^{*\otimes m} \xrightarrow{(v,\varphi)\mapsto c_1^1(v\otimes\varphi)} V^{*(m-1)}$$

переводит (косо) симметрические тензоры в (косо) симметрические[2]. Беря композицию этого отображения с одной стороны с полной поляризацией, а с другой стороны — с проекцией на алгебру (косо) симметрических полиномов, мы получаем билинейные отображения

$$\mathrm{pl} : (v,f) \longmapsto \mathrm{pl}_v f \;:\; \begin{matrix} V \times S^m V^* \longrightarrow S^{m-1}V^* \\ V \times \Lambda^n V^* \longrightarrow \Lambda^{m-1}V^* \end{matrix}\,,$$

которые называются *полярными преобразованиями* (или взятием *поляры* вектора v относительно f) и переводят (косо) симметрический многочлен f степени m в (косо) симметрический многочлен $\mathrm{pl}_v f$ степени $(m-1)$, полная поляризация которого описывается формулой

$$\widetilde{\mathrm{pl}_v f}(w_1,w_2,\dots,w_{m-1}) = \widetilde{f}(v,w_1,w_2,\dots,w_{m-1})\;,$$

где $\widetilde{f}$ есть полная поляризация f. Из этой формулы видно, что

$$\mathrm{pl}_v\mathrm{pl}_w f = \begin{cases} \;\;\mathrm{pl}_w\mathrm{pl}_v f, \text{ если } f \text{ симметричен} \\ -\mathrm{pl}_w\mathrm{pl}_v f, \text{ если } f \text{ кососимметричен}\;, \end{cases}$$

т. е. последовательные поляризации относительно нескольких векторов (анти)коммутируют, так что взятие поляры набора векторов $\mathrm{pl}_{v_1,v_2,\dots,v_r} f \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pl}_{v_1}\mathrm{pl}_{v_2}\,\cdots\,\mathrm{pl}_{v_r} f$ корректно задаёт билинейные отображения $S^rV \times S^mV^* \longrightarrow S^{m-r}V^*$ и $\Lambda^rV \times \Lambda^mV^* \longrightarrow \Lambda^{m-r}V^*$, переводящие многочлен f в многочлен $g = \mathrm{pl}_{v_1,v_2,\dots,v_r} f$, полная поляризация которого определяется соотношением

$$\widetilde{g}(w_1,w_2,\dots,w_{m-r}) = \widetilde{f}(v_1,v_2,\dots,v_r,w_1,w_2,\dots,w_{m-r})\;.$$

13.4. Частные производные в симметрической алгебре. Если зафиксировать двойственные базисы $\{e_\nu\} \subset V$ и $\{x_\nu\} \subset V^*$, то свёртка по первому индексу с e_i будет переводить базисный симметрический моном (13-3) в точно такой же базисный моном, но содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i (или в нуль, если $m_i = 0$). Поэтому из (13-5) вытекает, что $\deg(f)\cdot\mathrm{pl}_{e_i} f = \partial f/\partial x_i$ есть не что иное, как *частная производная* многочлена f. В силу билинейности полярного преобразования, для любого вектора $v = \sum v_i e_i \in V$ мы будем иметь формулу

$$\deg(f)\cdot\mathrm{pl}_v f = \partial_v f = \sum v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\;,$$

из которой, в частности, вытекает инвариантность правой части относительно линейных замен координат и коммутирование частных производных между собой: $\partial_u\partial_v = \partial_v\partial_u$.

Упражнение 13.5. Докажите, что частные производные вдоль векторов удовлетворяют правилу Лейбница: $\partial_v(f\cdot g) = \partial_v(f)\cdot g + f\cdot\partial_v(g)$.

[2]на другом языке: фиксация вектора $v \in V$ в качестве первого аргумента (косо) симметрической формы $\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{m} \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$ превращает её в (косо) симметрическую форму от $(m-1)$ аргументов

Для любых $v, w \in V$ и $f \in S^{m+n}V^*$ имеется очевидная симметрия:

$$m!\,\frac{\partial^m f}{\partial v^m}(w) = n!\,\widetilde{f}(\underbrace{v, v, \dots, v}_{m}, \underbrace{w, w, \dots, w}_{n}) = (n-m)!\,\frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(v)\,, \tag{13-11}$$

(в частности, обе части (13-11) однородны степени m по v и однородны степени n по w), а ньютоновское разложение для бинома немедленно даёт нам *формулу Тейлора*:

$$f(v+w) = \widetilde{f}\left((v+w)^{\deg f}\right) = \sum_{\nu=0}^{\deg f} \binom{\deg f}{\nu} \widetilde{f}\left(v^{\deg f - \nu} w^{\nu}\right) = \sum_{\nu=0}^{\deg f} \frac{1}{\nu!}\,\partial_w^{\nu} f(v)\,, \tag{13-12}$$

справедливую, тем самым, для любого многочлена f над любым полем характеристики нуль.

Упражнение 13.6. Покажите, что полная поляризация любого $f \in S^n V^*$ описывается формулой

$$\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{v_1}\partial_{v_2}\cdots\partial_{v_n} f \qquad \forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V\,.$$

13.4.1. Пример: касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ степени d, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ с $F \in S^d V^*$, и произвольную прямую $\ell = (pq) \in \mathbb{P}_n$ с $p, q \in V$. Коэффициенты $(\lambda : \mu)$ точки $\lambda p + \mu q \in \ell$ можно воспринимать как однородные координаты на этой прямой относительно базиса p, q. По формуле Ньютона–Тэйлора (13-12) пересечение $\ell \cap S$ задается в этих координатах однородным уравнением степени d на $(\lambda : \mu)$

$$f(\lambda, \mu) = F(\lambda p + \mu q) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i \mu^{n-i} \binom{d}{i} \widetilde{F}(p^i, q^{n-i}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{d} \lambda^i \mu^{n-i}\,\frac{1}{i!}\,\frac{\partial^i F}{\partial p^i}(q) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i \mu^{n-i}\,\frac{1}{(d-i)!}\,\frac{\partial^{d-i} F}{\partial q^{d-i}}(p)\,, \tag{13-13}$$

i-тый коэффициент которого $\widetilde{F}(p^i, q^{n-i}) = \widetilde{F}(\overbrace{p, p, \dots, p}^{i}, \overbrace{q, q, \dots, q}^{d-i}) = \dfrac{(d-i)!}{d!}\,\dfrac{\partial^i F}{\partial p^i}(q) = \dfrac{i!}{d!}\,\dfrac{\partial^{d-i} F}{\partial q^{d-i}}(p)$ биоднороден по (p, q) бистепени $(i, n-i)$. Таким образом, либо ℓ лежит на S (что происходит при $f(\lambda, \mu) \equiv 0$, т. е. когда $\widetilde{F}(p^i, q^{n-\mu}) = 0\ \forall i$), либо пересекает S в $\deg S$ точках $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$, учитываемых с надлежащими кратностями, равными кратностям вхождения линейного множителя

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix} = (\alpha_i''\lambda - \alpha_i'\mu)$$

в разложение однородного многочлена (13-13) на линейные множители[3] $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha_i''\mu - \alpha_i'\lambda)^{s_i}$. Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

Объединение всех прямых, касающихся S в точке $p \in S$ называется *касательным пространством* к S в p. Если $T_p S = \mathbb{P}_n$, то поверхность S называется *особой* в точке p (соответственно, p называется *особой точкой* поверхности S). В противном случае p называется *гладкой точкой* S. Поверхность S называется *гладкой*, если она гладкая во всех своих точках. Число

$$\mathrm{mult}_S(p) \overset{\text{def}}{=} \min_{\ell \ni p} (\ell, S)_p$$

называется *кратностью* точки p на S. Таким образом, гладкость точки $p \in S$ равносильна условию $\mathrm{mult}_S(p) = 1$.

Упражнение 13.7. Убедитесь, что точка $p \in S$ имеет кратность $\geqslant m$ тогда и только тогда, когда все возможные $(m-1)$-кратные частные производные от F зануляются в точке p.

Свойства касательных к гиперповерхности произвольной степени непосредственно обобщают свойства квадрик из §2.

[3] в аффинной окрестности точки q с аффинной координатой $t = \lambda/\mu$ это разложение превращается в обычное разложение $f(t, 1) = \prod (t - \alpha_i)^{m_i}$ многочлена $f(t, 1) \in \Bbbk[t]$ на линейные множители

13.4.2. ЛЕММА. *Прямая (pq), проходящая через точку $p \in S$ и любую точку $q \in \mathbb{P}_n$, тогда и только тогда касается S в точке p, когда $\widetilde{F}(p^{n-1}, q) = 0$.*

Доказательство. $F(p+tq) = t\binom{d}{1}\widetilde{F}(p^{n-1},q) + t^2\binom{d}{2}\widetilde{F}(p^{n-2},q^2) + \cdots$ имеет $t=0$ корнем кратности $\geqslant 2$, если и только если $\widetilde{F}(p^{n-1},q) = 0$. □

13.4.3. СЛЕДСТВИЕ. *Касательное пространство T_pS либо представляет собою гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $\sum\limits_{i=0}^{n} y_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$ на $y \in \mathbb{P}_n$, либо совпадает со всем $\mathbb{P}_n$, когда $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0\ \forall i$.* □

13.4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть q — гладкая точка на S или любая точка вне S. Тогда видимый из q контур поверхности*[4] *S высекается из S гиперповерхностью*

$$S_q^{(d-1)} \overset{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{P}_n \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} q_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(y) = 0 \right\}, \tag{13-14}$$

степени $(d-1)$.

Доказательство. Действительно, (qy) касается S в y, если $0 = \widetilde{F}(y^{n-1},q) = \mathrm{pl}_q F(y) = \dfrac{1}{d}\sum\limits_{i=0}^{n} q_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(y)$. Если этот многочлен обращается в 0 тождественно по y, то, взяв $y = q$, мы получим $F(q) = 0$, т. е. $q \in S$. В то же время $F(q,q,\ldots,q,y) = \mathrm{pl}_q^{n-1}F(y) = \mathrm{pl}_q^{n-2}\mathrm{pl}_q F(y) \equiv 0$, ввиду $\widetilde{F}(y^{n-1},q) \equiv 0$. Таким образом, q — особая точка на S. □

13.4.5. Полярные гиперповерхности. Гиперповерхность $S_q^{(r)} \overset{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{F}(q^{n-r}, y^r) = 0 \right\}$ из (13-14) называется *полярой r-й степени* для поверхности S относительно p. Интуитивно, поляра $S_q^{(r)}$ относительно гладкой точки $q \in S$ представляет собою «соприкасающуюся поверхность» степени r, которая имеет в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S, ту же «касательную квадрику» (т. е. квадратичную поляру относительно q), что и S, и т. д. вплоть до совпадения поляр степени $(r-1)$. Если же точка $q \in S$ особа кратности $\mathsf{mult}_S(q) = m \geqslant 2$, то все поляры степени $\leqslant (m-1)$ относительно p тривиальны (имеют нулевые уравнения), а поляра m-й степени не тривиальна и особа в точке q.

13.4.6. Пример: пространство вырожденных квадрик. В пространстве $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ всех квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ рассмотрим фигуру $S \subset \mathbb{P}_N$, образованную всеми вырожденными квадриками. Если зафиксировать на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты x и задавать квадрики квадратными симметрическими матрицами A размера $(n+1)\times(n+1)$, то матричные элементы a_{ij} с $i \geqslant j$ составят естественные однородные координаты на $\mathbb{P}_N$, в которых S будет задаваться уравнением $\det A = 0$. Таким образом, $S \subset \mathbb{P}_N$ является гиперповерхностью степени $(n+1)$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

представляет собой $n\times n$-минор матрицы A, стоящий вне i-й строки и j-го столбца, вырожденная квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ с матрицей Грама A тогда и только тогда является гладкой точкой поверхности S, когда $\mathrm{rk}\,A = n$, т. е. когда Q является простым конусом с единственной особой точкой $q = \mathrm{Sing}\,Q$.

Из соотношения Сильвестра $\det A \cdot E = A \cdot A^\vee$ вытекает, что при $\det A = 0$ все столбцы присоединённой матрицы $A^\vee$ лежат в ядре матрицы A. Если $\mathrm{rk}\,A = n$, то $\dim\ker A = 1$, а значит, $\mathrm{rk}\,A^\vee = 1$.

Упражнение 13.8. Покажите, что любая симметрическая матрица $A^\vee$ ранга 1 имеет вид $q^t \cdot q$, где $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$, причём когда $A^\vee$ является присоединённой матрицей для матрицы A с одномерным ядром, вектор q порождает $\ker A$.

Итак, касательное пространство $T_QS \subset \mathbb{P}_N$ в неособой точке Q с матрицей Грама A состоит из всех квадрик на $\mathbb{P}_n$, матрица Грама B которых удовлетворяет уравнению

$$0 = \sum b_{ij} \cdot \frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = \sum b_{ij} a_{ij}^\vee = \sum b_{ij} q_i q_j\,,$$

[4] т. е. замыкание множества всех отличных от q точек, в которых касаются S всевозможные касательные, опущенные на S из q

т. е. из всех квадрик, проходящих через вершину $q = \operatorname{Sing} Q$ квадрики Q.

13.4.7. Пример: линейный носитель $\operatorname{Supp}(f)$ многочлена $f \in S^nV^*$ определятся как минимальное подпространство $W \subset V^*$ такое, что $f \in S^nW$ и совпадает с носителем полной поляризации $\operatorname{pl}(f) \in \operatorname{Sym}{}^nV^*$. По теореме n° 12.7.1 $\operatorname{Supp}(f)$ является образом свёртки[5] $S^{n-1}V \otimes S^nV^* \longrightarrow V^*$ и порождается линейными формами, которые можно получить из f всевозможными $(n-1)$-кратными дифференцированиями

$$\partial_1^{m_1}\partial_2^{m_2} \cdots \partial_d^{m_d} f(x)\,, \tag{13-15}$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{d} m_\nu = n-1$, $d = \dim V$, $n = \deg f$.

13.5. Частные производные в грассмановой алгебре. Определим *грассманову частную производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^mV$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v\omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg(f) \cdot \operatorname{pl}_v\omega\,.$$

Из билинейности полярного преобразования мы сразу же получаем, что $\partial_v = \sum v_i\,\partial_{x_i}$ для $v = \sum v_ie_i$, но теперь (из-за антикоммутирования последовательных полярных преобразований) частные производные антикоммутируют: $\partial_u\partial_v = -\partial_v\partial_u$, в частности, $\partial_v^2 \equiv 0\ \forall v$.

Упражнение 13.9. Докажите, что грассмановы частные производные удовлетворяют *градуированному* правилу Лейбница: $\partial_v(f \wedge g) = \partial_v(f) \wedge g + (-1)^{\deg f} f \wedge \partial_v(g)$.

13.5.1. Пример: линейный носитель $\mathbf{Supp}(\boldsymbol{\omega})$ грассманова многочлена $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda^nV^*}$, т. е. минимальное подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^nW$, является образом свёртки $\Lambda^{n-1}V \otimes S^nV^* \longrightarrow V^*$ и порождается всевозможными частными производными[6]

$$\partial_J\omega = \partial_{j_1}\partial_{j_2}\ldots\partial_{j_{n-1}}\omega\,,$$

где $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}) \subset \{1,\,2,\,\ldots\,,\,d\}$ пробегает все строго возрастающие наборы из $(n-1)$ индексов, а $\partial_j = \partial_{x_j}$. Если разложить ω в сумму мономов $\omega = \sum \alpha_I \cdot x_I$, то вклад в $\partial_J\omega$ дадут только мономы с $I \supset J$. Поэтому, с точностью до ненулевого скалярного множителя,

$$\partial_J\omega = \sum_{i \notin J} (-1)^{p(i,J)}\,\alpha_{J\sqcup i}\,e_i \tag{13-16}$$

где $p(i,J)$ есть номер места, на котором оказывается i в возрастающей перестановке набора индексов $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, i\}$.

[5] из-за симметричности тензора $\operatorname{pl}(f)$ свёртки из n° 12.7.1 не будут зависеть от J

[6] из-за кососимметричности тензора $\operatorname{pl}(f)$ свёртки из n° 12.7.1 для разных J отличаются максимум знаком