§12. Тензорная алгебра.

12.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим векторные пространства $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и m над произвольным полем $\Bbbk$. Отображение

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W \tag{12-1}$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому своему аргументу при произвольно зафиксированных остальных: $\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda\,\varphi(\dots, v', \dots) + \mu\,\varphi(\dots, v'', \dots)$.

Упражнение 12.1. Покажите, что полилинейные отображения (12-1) образуют векторное пространство размерности $m \cdot \prod d_\nu$.

Если зафиксировать в каждом V_i некоторый базис $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$, а также какой-либо базис $e_1, e_2, \dots, e_m$ в W, то полилинейное отображение φ однозначно определяется своими значениями на всех комбинациях базисных векторов:

$$\varphi\big(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}\big) = \sum_\nu a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \cdot e^\nu \in W ,$$

т. е. набором из $m \cdot \prod d_\nu$ чисел $a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \in \Bbbk$, и переводит произвольный набор векторов $v_i = \sum\limits_{\alpha_i=1}^{d_i} x_{\alpha_i}^{(i)} e_{\alpha_i}^{(i)}$ в вектор $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum\limits_{\nu=1}^{m} e_\nu \cdot \sum\limits_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \cdot x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)}$. Числа $a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$ могут при желании рассматриваться как элементы некой матрицы $(n+1)$-мерного формата[1] $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \times m$.

Упражнение 12.2. Проверьте, что все векторы набора $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ тогда и только тогда ненулевые когда $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$ для какого-нибудь полилинейного отображения φ.

12.2. Тензорное произведение векторных пространств. Беря композиции линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ с фиксированным полилинейным отображением

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} U , \tag{12-2}$$

мы получаем *линейный оператор* из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ в пространство полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$. Полилинейное отображение (12-2) называется *универсальным*, если этот оператор является изоморфизмом *для всех* пространств W. Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого пространства W и любого полилинейного отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ существует единственный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник *единственным* пунктирным *линейным* отображением.

[1] обычные матрицы, дающие *линейные* отображения $V \longrightarrow W$, имеют в этом смысле 2-мерный формат $d \times m$

12.2.1. ЛЕММА. *Любые два универсальных полилинейных отображения*

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_1} U_1 \quad \text{и} \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_2} U_2$$

канонически отождествляются при помощи единственного линейного изоморфизма $U_1 \xrightarrow{\iota} U_2$ *такого, что* $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $U_1 \xrightarrow{F_{21}} U_2$ и $U_2 \xrightarrow{F_{12}} U_1$, которые встраиваются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"] & & U_1 \arrow[dd, dashed, "F_{21}"] \\
& V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"] \arrow[ur, "\tau_1"'] \arrow[dl, "\tau_2"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{12}"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"'] & & U_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dotted, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \arrow[dl, dotted, "F_{12}"'] \\
& U_2 \arrow[dl, dotted, "F_{12}"] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dotted, "F_{21}"] & \\
U_1 & & & & U_2
\end{tikzcd}$$

Обе композиции $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$, $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$, поскольку канонические представления $\tau_1 = \varphi{\circ}\tau_1$, $\tau_2 = \psi{\circ}\tau_2$ самих универсальных полилинейных отображений, в силу единственности таковых представлений, возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

12.2.2. ЛЕММА. *Пусть векторы* $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ *образуют базис пространства* V_i. *Обозначим через* $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ *векторное пространство размерности* $\prod d_i$, *базисом которого являются всевозможные символы*

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i \tag{12-3}$$

Тогда полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, *переводящее набор базисных векторов* $\left(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, e_{\alpha_n}^{(n)}\right) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ *в соответствующий базисный символ* (12-3), *является универсальным.*

Доказательство. Для любых полилинейного $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ и линейного $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{F} W$ равенство. $\varphi = F{\circ}\tau$ означает, что $F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, e_{\alpha_n}^{(n)})$ на каждом наборе базисных векторов. □

Векторное пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* пространств V_ν, а универсальное полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным умножением* векторов. Значение $\tau(v_1, v_2, \dots, v_n)$ на произвольном наборе векторов записывается как $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ и называется *разложимым тензором*. Согласно лемме n° 12.2.2, линейная оболочка множества разложимых тензоров совпадает со всем пространством $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, однако само множество разложимых тензоров образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ некое нелинейное подмногообразие[2].

12.3. Вложение Сегре. На проективно-геометрическом языке, тензорное произведение векторов задаёт *вложение Сегре*

$$\mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} = \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n) \xhookrightarrow{s} \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n) = \mathbb{P}_N$$

(где $m_i = \dim V_i - 1$, $N = \prod(m_i + 1) - 1$), которое биективно отображает $(\sum m_i)$-мерное произведение проективных пространств на *многообразие Сегре*, образованное классами пропорциональности разложимых тензоров и обобщающее квадрику Сегре из n° 2.4.7. Оно не содержится ни в какой гиперплоскости и заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$.

[2]это связано с тем, что отображение τ *поли*линейно, но *не* линейно

12.3.1. Пример: вложение Сегре $\mathbb{P}_{m_1} \times \mathbb{P}_{m_2} \hookrightarrow \mathbb{P}_{m_1+m_2+m_1m_2}$, по определению, переводит пару точек $x = (x_0 : x_1 : \ \dots : x_{m_1}) \in \mathbb{P}_{m_1}$, $y = (y_0 : y_1 : \ \dots : y_{m_2}) \in \mathbb{P}_{m_2}$ в точку, однородными координатами которой являются $(1+m_1)(1+m_2)$ всевозможных произведений $x_j y_i$. Их удобно организовать в матрицу

$$(a_{ij}) = (x_j y_i) = y^t \cdot x\ .$$

На геометрическом языке вложение Сегре отображает $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V,W))$ и переводит пару $(\xi, w) \in V^* \times W$ в линейный оператор $\xi \otimes w : v \mapsto \xi(v) \cdot w$ ранга один (в точности как в n° 2.4.7).

Упражнение 12.3. Проверьте, что отображение $V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W)$, переводящее (ξ, w) в линейный оператор $v \longmapsto \xi(v) \cdot w$, является универсальным билинейным отображением и, тем самым, индуцирует канонический изоморфизм $V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}(V,W)$.

Как мы видели в упр. 2.7, любой оператор ранга 1 имеет вид $v \mapsto \xi(v)\, w$. Поэтому многообразие Сегре в этом случае представляет собой множество всех операторов ранга 1, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Если зафиксировать в V и W базисы, представить все операторы матрицами и использовать матричные элементы в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V,W))$, то многообразие Сегре будет задаваться в этих координатах набором квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0$$

зануляющих все 2×2 - миноры матрицы $(a_{\mu\nu})$.

12.4. Тензорная алгебра векторного пространства. Тензорное произведение векторного пространства V самого с собой $V^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \ \cdots \ \otimes V}_{n}$ называется *n-той тензорной степенью* пространства V. Все тензорные степени объединяются в бесконечномерную некоммутативную (но ассоциативную) градуированную алгебру

$$\mathsf{T}^\bullet V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

(где при $n = 0$ мы полагаем $V^{\otimes 0} \overset{\text{def}}{=} \Bbbk$), которую можно неформально представлять себе как алгебру многочленов от *некоммутирующих* переменных $e_1, e_2, \dots, e_d$, составляющих базис пространства V. Базисом этой алгебры являются всевозможные некоммутативные мономы[3] $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ \cdots \ \otimes e_{i_m}$, перемножение которых заключается в формальном приписывании их друг к другу через значок $\otimes$.

Упражнение 12.4. Используя универсальность, постройте канонические изоморфизмы[4]

$$\left(V^{\otimes n_1} \otimes V^{\otimes n_2}\right) \otimes V^{\otimes n_3} \simeq V^{\otimes n_1} \otimes \left(V^{\otimes n_2} \otimes V^{\otimes n_3}\right) \simeq V^{\otimes (n_1+n_2+n_3)}\ .$$

Формально, $\mathsf{T}^\bullet V$ является *свободной* ассоциативной $\Bbbk$-алгеброй, порожденной пространством V. По определению, это означает, что для любой ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и любого $\Bbbk$-линейного отображения $V \xrightarrow{f} A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\mathsf{T}^\bullet V \xrightarrow{\alpha} A$ такой, что $\alpha|_V = f$.

Упражнение 12.5. Следуя n° 12.2.1 покажите, что алгебра $\mathsf{T}^\bullet V$ (вместе с вложением $V \subset \mathsf{T}^\bullet V$) действительно обладает этим универсальным свойством, причём она определяется этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр (перестановочного с вложением $V \subset \mathsf{T}^\bullet V$).

12.5. Двойственность. Векторные пространства $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ канонически двойственны друг другу. Спаривание между тензорами $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \ \cdots \ \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \ \cdots \ \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ задается формулой

$$\langle\, v\, ,\, \xi\, \rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) \tag{12-4}$$

[3]по определению, *различные* для различных наборов индексов $(i_1, i_2, \dots, i_m)$

[4]которые, собственно, и превращают тензорное произведение векторов в корректное ассоциативное умножение на $\mathsf{T}^\bullet V$

и называется *полной сверткой*. Очевидно, что при этом любая пара двойственных базисов

$$e_1, e_2, \dots, e_n \subset V\,, \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \subset V^* \quad : \quad \xi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

производит двойственные относительно полной свертки базисы из тензорных мономов

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad \text{и} \quad \xi_{j_1} \otimes \xi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_s}\,.$$

Итак, $(V^{\otimes n})^* \simeq (V^*)^{\otimes n}$. С другой стороны, универсальное свойство $V^{\otimes n}$ канонически отождествляет пространство $(V^{\otimes n})^*$ с пространством всех полилинейных форм

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \longrightarrow \Bbbk\,.$$

Поэтому имеется канонический изоморфизм пространства $(V^*)^{\otimes n}$ с пространством полилинейных форм от n аргументов на V, сопоставляющий каждому разложимому тензору

$$\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$$

полилинейную форму $(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)$.

12.6. Частичные свертки. Рассмотрим два произвольных инъективных (не обязательно монотонных) отображения

$$\{1, 2, \,\dots\,, p\} \xleftarrow{\;I\;} \{1, 2, \,\dots\,, m\} \xrightarrow{\;J\;} \{1, 2, \,\dots\,, q\}$$

и будем писать i_ν и j_ν вместо $I(\nu)$ и $J(\nu)$. Образы этих отображений суть упорядоченные (но не обязательно монотонные) наборы неповторяющихся индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, состоящие из одинакового числа элементов. Линейный оператор

$$\begin{gathered}
\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \xrightarrow{\;c^I_J\;} \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-m} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-m} \\
\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \longmapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \big(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{j \notin J} v_j\big)
\end{gathered} \tag{12-5}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J.

12.6.1. Пример: свертка вектора с полилинейной формой. Полилинейную форму $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ можно интерпретировать как тензор из $V^{*\otimes n}$ и свернуть его по первому индексу с произвольным вектором $v \in V$. Результат лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и, будучи рассмотрен как полилинейная форма от $(n-1)$ векторов, называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $i_v\varphi$ или $v \llcorner \varphi$.

Упражнение 12.6. Проверьте, что $i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$, т. е. внутреннее умножение на v есть не что иное, как фиксация v в качестве первого аргумента формы φ.

12.7. Линейный носитель тензора. Если выбрать в пространстве V базис, согласованный с парой подпространств $U, W \subset V$ и рассмотреть соответствующий мономиальный базис в тензорной алгебре $\mathsf{T}^\bullet V$, то мы увидим, что $(U \cap W)^{\otimes n} = U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ в $V^{\otimes n}$ при всех n. Из этого следует, что для любого $t \in V^{\otimes n}$ существует минимальное подпространство $\mathrm{Supp}(t) \subset V$, такое что $t \in W^{\otimes n}$ (достаточно пересечь все подпространства, обладающие этим свойством). Это минимальное подпространство называется *линейным носителем* тензора t. Неформально, оно аккумулирует все «неизвестные», от которых некоммутативный многочлен t эффективно зависит и которые нельзя «сократить» никакой линейной заменой переменных. Чтобы явно построить в $\mathrm{Supp}(t)$ систему порождающих векторов, свяжем с каждым инъективным (не обязательно монотонным) отображением $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) : \{1, 2, \dots, (n-1)\} \hookrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ свёртку $V^{*\otimes(n-1)} \xrightarrow{c_t^J} V$, которая для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$ спаривает ν-й сомножитель каждого разложимого тензора $\varphi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_{n-1}$ с j_ν-м сомножителем t

$$c_t^J(\varphi) = c_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})}^{(1, 2, \dots, (n-1))}(\varphi \otimes t) \,. \tag{12-6}$$

12.7.1. ТЕОРЕМА. $\mathrm{Supp}(t) \subset V$ *порождён образами* $c_t^J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right) \subset V$ *всех*[5] *свёрток* (12-6).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Ясно, что $t \in W^{\otimes n} \Rightarrow \mathrm{im}\left(c_t^J\right) \subset W$ для любой свёртки, так что достаточно доказать, что W аннулируется любой линейной формой $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\left(c_t^J\right)$. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный к $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ базис в W. Зануление свёртки $\left\langle \xi_1 \,,\, c_t^J\left(\xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_{n-1}}\right) \right\rangle$ для любых J и $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{n-1}}$ означает, что полная свёртка t с любым базисным мономом пространства $W^{*\otimes n}$, содержащим ξ_1, обращается в нуль. Но согласно n° 12.5 такая свёртка равна коэффициенту при двойственном мономе в разложении t по $w_{i_1} \otimes w_{i_2} \otimes \cdots \otimes w_{i_n}$. Таким образом, в разложении t нет мономов, содержащих w_1, т. е. $\mathrm{Supp}(t)$ строго меньше, чем W. □

12.8. Условия (косо) симметричности. Полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} U \tag{12-7}$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают. Беря композицию $F \longmapsto F\circ\varphi$ линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ с фиксированным (косо) симметричным отображением (12-7), мы получаем линейный оператор из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ в пространство (косо) симметричных полилинейных форм $V^n \longrightarrow W$. (Косо)симметричное полилинейное отображение (12-7) называется *универсальным*, если этот оператор — изоморфизм для любого пространства W. Пространство – образ универсального симметричного полилинейного отображения обозначается через S^nV и называется n-той *симметричной степенью*, а кососимметричного — через Λ^nV и называется n-той *внешней степенью* пространства V.

Упражнение 12.7. Покажите, что S^nV и Λ^nV (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с универсальным отображением.

Если положить $S^0V = \Lambda^0V \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$, то на прямых суммах $S^\bullet V = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} S^nV$ и $\Lambda^\bullet V = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \Lambda^nV$ можно ввести структуру градуированных[6] $\Bbbk$-алгебр. Технически удобнее, однако, сначала определить эти градуированные алгебры независимо, в терминах образующих и соотношений, а потом проверить, что умножения в этих алгебрах

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^nV & \longleftarrow & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n & \longrightarrow & S^nV \\ v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n & \longleftarrow\!\!\shortmid & (v_1, v_2, \dots, v_n) & \longmapsto & v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \end{array}$$

являются универсальными (косо) симметричными полилинейными отображениями.

12.8.1. Симметрическая алгебра $S^\bullet V$ пространства V есть фактор алгебра свободной ассоциативной алгебры $\mathsf{T}^\bullet V$ по соотношениям коммутативности $vw = wv$. Более точно, обозначим через $\mathscr{I}_{\mathrm{sym}} \subset \mathsf{T}^\bullet V$ линейную оболочку всех разложимых тензоров вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) \,,$$

[5] т. е. берущихся по всем возможным J

[6] это означает, по определению, что операция умножения согласована с разложением в прямые суммы в том смысле, что произведение переводит $S^nV \times S^mV \longrightarrow S^{m+n}V$, $\Lambda^nV \times \Lambda^mV \longrightarrow \Lambda^{m+n}V$

где оба члена различаются только перестановкой v и w. Иначе $\mathscr{I}_{\text{sym}}$ можно описать как двусторонний идеал в $\mathsf{T}^\bullet V$, порожденный всеми разностями $v \otimes w - w \otimes v \in V \otimes V$. Фактор алгебра $S^\bullet V \overset{\text{def}}{=} \mathsf{T}^\bullet V / \mathscr{I}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой[7]. Поскольку $\mathscr{I}_{\text{sym}} = \bigoplus_{n\geqslant 0} (\mathscr{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})$ является прямой суммой своих однородных компонент, симметрическая алгебра градуирована:

$$S^\bullet V = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n V\ , \quad \text{где} \quad S^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathscr{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\ ,$$

и если зафиксировать базис $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$, то вся алгебра $S^\bullet V$ отождествится с алгеброй многочленов $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ от базисных векторов e_i, а пространство $S^n V$ превратится в пространство однородных полиномов степени n.

Упражнение 12.8. Найдите $\dim S^n V$.

12.8.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathscr{I}_{\text{sym}}$:*

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} S^n(V) \tag{12-8}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой.

Доказательство. Любое полилинейное отображение $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F \circ \tau$, где $V^{\otimes n} \xrightarrow{F} W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда $F(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)$, что равносильно тому что $\varphi(\dots, v, w, \dots) = \varphi(\dots, w, v, \dots)$. $\square$

Упражнение 12.9. Убедитесь, что $S^\bullet V$ является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой векторным пространством V, т. е. для любой *коммутативной* $\Bbbk$-алгебры A и линейного отображения векторных пространств $V \xrightarrow{f} A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $S^\bullet V \xrightarrow{\alpha} A$ такой, что $\alpha|_V = f$. Проверьте также, что $S^\bullet V$ (вместе с вложением $V \subset S^\bullet V$) определяется этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр (перестановочного с вложением $V \subset S^\bullet V$).

12.8.3. Внешняя алгебра $\Lambda^\bullet V$ пространства V является фактор алгеброй свободной ассоциативной алгебры $\mathsf{T}^\bullet V$ по соотношениям $v^2 = 0$, т. е. по двустороннему идеалу $\mathscr{I}_{\text{skew}} \subset \mathsf{T}^\bullet V$, порожденному всеми тензорами вида $v \otimes v \in V \otimes V$:

$$\Lambda^\bullet V \overset{\text{def}}{=} \mathsf{T}^\bullet V / \mathscr{I}_{\text{skew}}\ .$$

Как и в симметричном случае, идеал $\mathscr{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n\geqslant 0} (\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$ однороден[8], и фактор алгебра $\Lambda^\bullet V$ градуирована подпространствами $V^{\otimes n} / (\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}) \simeq \Lambda^n V$.

Упражнение 12.10. Покажите, что подпространство $\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ содержит соотношения антикоммутативности $v \otimes w - w \otimes v$ (с произвольными $v, w \in V$).

Упражнение 12.11. Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathscr{I}_{\text{skew}}$

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} \Lambda^n(V) \tag{12-9}$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением.

Индуцированное в алгебре $\Lambda^\bullet V$ умножение (12-9) называется *внешним* (а также *косым* или *грассмановым*) и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Согласно упр. 12.10 оно меняет знак при перестановке

[7] которую, впрочем, принято опускать

[8] $(\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$ совпадает с линейной оболочкой разложимых тензоров степени n вида $(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots)$

любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей произведение умножается на знак перестановки.

Упражнение 12.12. Для любых $U, W \subset V$ проверьте, что $S^nU \cap S^nW = S^n(U \cap W)$ в S^nV и $\Lambda^nU \cap \Lambda^nW = \Lambda^n(U \cap W)$ в Λ^nV.

Как и в симметрическом случае, фиксация базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ отождествляет внешнюю алгебру с алгеброй *грассмановых многочленов* от базисных векторов e_i

$$\Lambda^\bullet V \xrightarrow{\sim} \Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d\rangle \ ,$$

которую мы уже рассматривали в первом семестре, когда занимались определителями. По построению, грассмановы переменные e_i *анти*коммутируют $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, и всякий грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Таким образом, любой грассманов моном степени n с точностью до знака можно записать в виде $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d$.

12.8.4. ЛЕММА. *Мономы $e_I \overset{\text{def}}{=} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегает все строго возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, d\}$, образуют базис пространства Λ^nV однородных грассмановых мономов степени n. В частности, $\Lambda^nV = 0$ для $n > \dim V$, $\dim \Lambda^nV = \binom{d}{n}$, и $\dim \Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d\rangle = 2^d$.*

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U, базис которого состоит из символов ξ_I, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегает все возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, d\}$. Определим кососимметрическое полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\alpha} U \ : \ (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I \ ,$$

где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$ есть единственная *возрастающая* перестановка индексов $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Это отображение универсально: для любого кососимметрического полилинейного отображения

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} W$$

правило $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \overset{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$ корректно определяет единственно возможный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F \circ \alpha$. Поэтому имеется канонический изоморфизм между U и Λ^nV, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$. $\square$

Упражнение 12.13. Проверьте, что $f(e) \wedge g(e) = (-1)^{\deg(f)\cdot\deg(g)}\, g(e) \wedge f(e)$ для любых однородных многочленов $f(e), g(e) \in \Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d\rangle$ (в частности, многочлены, состоящие только из мономов четной степени, лежат в центре[9] грассмановой алгебры).

Упражнение 12.14. Опишите центр алгебры $\Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d\rangle$, т. е. все грассмановы полиномы, коммутирующие с *с каждым* элементом этой алгебры.

[9] напомню, что *центром* (некоммутативного) кольца называется множество всех элементов, коммутирующих с любыми элементами этого кольца