§10. Отступление: кватернионы и спиноры в четырёхмерии.

10.1. Пространство $\mathbf{Mat_2}(\mathbb{C})$. На 4-мерном пространстве $W = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера 2×2 имеется $\mathbb{C}$-линейная инволюция, переводящая матрицу в присоединённую транспонированную матрицу

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^\times \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\vee t} = \begin{pmatrix} \eta_{22} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{11} \end{pmatrix} \tag{10-1}$$

Упражнение 10.1. Проверьте, что это антигомоморфизмом алгебры матриц, т.е. $(\eta\zeta)^\times = \zeta^\times\eta^\times$.

Поскольку $\eta \cdot \eta^\times = \det(\eta) \cdot E$ комплексная билинейная форма

$$\widetilde{\det}(\eta, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\eta\,\zeta^\times) \tag{10-2}$$

задаёт поляризацию комплексной квадратичной формы $\det(\eta)$ на W.

Упражнение 10.2. Убедитесь, что $\mathbb{C}$-билинейная форма (10-2) симметрична и невырождена, и напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из матричных единиц.

Кроме того, на W имеется $\mathbb{C}$-антилинейная инволюция эрмитова сопряжения матриц

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^* \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\eta}^t = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{11} & \overline{\eta}_{21} \\ \overline{\eta}_{12} & \overline{\eta}_{22} \end{pmatrix} , \tag{10-3}$$

которая также является антигомоморфизмом алгебры матриц (т.е. $(\eta\zeta)^* = \zeta^*\eta^*$), и формула, аналогичная (10-2), задаёт на пространстве W эрмитово скалярное произведение

$$(\eta, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\eta\,\zeta^*) . \tag{10-4}$$

Ассоциированная с этим произведением норма представляет собой полусумму квадратов модулей матричных элементов

$$||\eta||^2 \stackrel{\text{def}}{=} (\eta, \eta) = \frac{1}{2} \sum |\eta_{ij}|^2 ,$$

и матричные единицы составляют ортогональный базис формы (10-4) (откуда видна её невырожденность и положительная определённость).

Композиция инволюций $\eta \leftrightarrow \eta^*$ и $\eta \leftrightarrow \eta^\times$ является $\mathbb{C}$-антилинейной инволюцией на пространстве W и автоморфизмом матричной алгебры

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\eta}^\vee = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{22} & -\overline{\eta}_{21} \\ -\overline{\eta}_{12} & \overline{\eta}_{11} \end{pmatrix} . \tag{10-5}$$

Упражнение 10.3. Убедитесь, что $(\eta\zeta)^\sigma = \eta^\sigma\zeta^\sigma$ и $(\eta, \zeta) = \widetilde{\det}(\eta, \zeta^\sigma)$, а также что все три инволюции попарно коммутируют друг с другом и произведение любых двух из них равно третьей.

Мы будем использовать инволюцию $\eta \leftrightarrow \eta^\sigma$ в качестве *вещественной структуры* на W. Подпространство $V = \mathrm{Re}_\sigma(W)$ вещественных векторов этой структуры состоит из матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_2 + i\,x_3 \\ -x_2 + i\,x_3 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad x_\nu \in \mathbb{R} ,$$

и обе формы (10-2), (10-4) ограничиваются на это вещественное подпространство в стандартную евклидову структуру $(x, x) = \sum x_\nu^2$, ортонормальным базисом которой служат матрицы

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{10-6}$$

Итак, комплексное 4-мерное пространство W представляет собой комплексификацию 4-мерного вещественного евклидова пространства $V \simeq \mathbb{R}^4$, а формы $\widetilde{\det}$ и $(*,*)$ суть комплексно билинейное и эрмитово продолжения евклидовой структуры с V на W.

10.2. Тело кватернионов $\mathbb{H}$**.** Поскольку σ является гомоморфизмом относительно матричного умножения, вещественное подпространство $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ является подалгеброй в алгебре матриц. Эта подалгебра называется *алгеброй кватернионов* и обозначается $\mathbb{H}$. Вектор $\boldsymbol{e}$ является единичным элементом этой алгебры, и обычно обозначается просто 1, а в произведениях опускается вовсе. Таблица умножения остальных базисных кватернионов (10-6) имеет вид:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 \;, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k} \;, \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} \;, \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \;. \end{gathered} \tag{10-7}$$

Стало быть, произвольная пара кватернионов перемножается по правилу

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) \cdot (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) = {} & (y_0x_0 - y_1x_1 - y_2x_2 - y_3x_3) \\ & + (y_0x_1 + y_1x_0 + y_2x_3 - y_3x_2)\,\boldsymbol{i} \\ & + (y_0x_2 + y_2x_0 + y_3x_1 - y_1x_3)\,\boldsymbol{j} \\ & + (y_0x_3 + y_3x_0 + y_1x_2 - y_2x_1)\,\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{10-8}$$

Упражнение 10.4. Убедитесь непосредственно, что формулы (10-7) и (10-8) задают на абстрактном вещественном векторном пространстве с базисом $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ структуру ассоциативной алгебры над $\mathbb{R}$.

По аналогии с комплексными числами, 1-мерное подпространство $\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e} \subset \mathbb{H}$ называется пространством *чисто вещественных* кватернионов, а 3-мерное подпространство

$$I = \{x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

называются пространством *чисто мнимых* кватернионов. На языке матриц, $I \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ состоит из всех косоэрмитовых матриц со следом нуль, а $\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e}$ состоит из вещественных скалярных матриц.

Упражнение 10.5. Убедитесь, что I и $\boldsymbol{e}$ ортогональны относительно евклидовой структуры на $\mathbb{H}$.

Поскольку ограничение на $\mathbb{H}$ инволюции эрмитова сопряжения $\eta \leftrightarrow \eta^*$ тождественно действует на $\boldsymbol{e}$ и меняет знак у мнимых кватернионов, эта инволюция называется *кватернионным сопряжением*. Она является антиавтоморфизмом алгебры кватернионов: $(pq)^* = q^*p^*$.

Так как евклидова норма кватерниона $\eta = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ представляется в виде

$$||\eta||^2 = \sum x_\nu^2 = (\eta, \eta) = \det(\eta) \;,$$

из мультипликативности определителя вытекает мультипликативность нормы кватернионов относительно кватернионного умножения:

$$||\eta\zeta|| = ||\eta|| \cdot ||\zeta|| \quad \forall\, \eta, \zeta \in \mathbb{H} \;.$$

Мультипликативность нормы легко усматривается и без матричной интерпретации. Из первой строчки формулы (10-8) очевидно, что скалярное произведение выражается через кватернионное умножение как

$$(p, q) = \mathrm{Re}\,(p \cdot q^*) = \mathrm{Re}\,(p^* \cdot q) \;. \tag{10-9}$$

Поскольку $\forall\, q \in \mathbb{H}$ кватернион $q \cdot q^*$ самосопряжён, он чисто вещественен: $q \cdot q^* = \mathrm{Re}\,(q \cdot q^*)$. Следовательно, беря в (10-9) $p = q$, получаем соотношение

$$||q||^2 = \sum x_\nu^2 = q \cdot q^* \;, \tag{10-10}$$

из которого вытекает $||pq||^2 = pq(pq)^* = pqq^*p^* = p||q||^2p^* = ||p||^2||q||^2$.

Упражнение 10.6. Выведите из мультипликативности кватернионной нормы *тождество Эйлера*[1]

$$
\begin{aligned}
(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2) = &(x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)^2\\
&+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)^2\\
&+(x_0y_2+x_2y_0+x_3y_1-x_1y_3)^2\\
&+(x_0y_3+x_3y_0+x_1y_2-x_2y_1)^2
\end{aligned}
\tag{10-11}
$$

Другим важным следствием соотношения (10-10) является наличие в $\mathbb{H}$ *деления*: для любого ненулевого $q\in\mathbb{H}$ кватернион $q^{-1}=q^*/||q||^2$ двусторонне обратен к q, т. е. $q\cdot q^{-1}=q^{-1}\cdot q=1$. Ассоциативное некоммутативное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *телом*[2]. Итак, кватернионы образуют тело.

Упражнение 10.7. Покажите, что центр алгебры кватернионов $Z(\mathbb{H})\overset{\text{def}}{=}\{\zeta\in\mathbb{H}\mid q\zeta=\zeta q\ \ \forall q\in\mathbb{H}\}$ совпадает с пространством чисто вещественно кватернионов.

Из (10-9) следует также, что ортогональность кватернионов p и q равносильна тому, что кватернион pq^* чисто мним, т. е. антисамосопряжён: $pq^*=-qp^*$. Применяя это наблюдение к чисто мнимым кватернионам $p^*=-p$ и $q^*=-q$ получаем такой полезный при практических вычислениях результат:

10.2.1. ЛЕММА. *Чисто мнимые кватернионы p, q ортогональны тогда и только тогда, когда они антикоммутируют, причём в этом случае произведение $pq=-qp$ тоже будет чисто мнимым кватернионом, ортогональным как к p, так и к q.*

Доказательство. Антисамосопряжённость произведения $r=pq=-qp$ вытекает из $r^*=(pq)^*=q^*p^*=qp=-r$, а его ортогональность p и q — из $rp=pqp=-p^2q=-rp$ и $rq=pq^2=-qpq=-qr$. □

Упражнение 10.8. Убедитесь, что соотношения (10-7) на *произвольные* три кватерниона $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ равносильны тому, что эти кватернионы образуют ортонормальный базис пространства чисто мнимых кватернионов, ориентированный точно также, как базис (10-6).

10.3. Универсальное накрытие $S^3=\mathrm{SU}_2\longrightarrow\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Трёхмерная сфера кватернионов единичной нормы в матричной интерпретации совпадает со специальной унитарной группой, поскольку для матриц единичного определителя $\eta^\times=\eta^{-1}$ и условие σ-вещественности $\eta^\times=\eta^*$ превращается в условие унитарности $\eta^{-1}=\eta^*$:

$$S^3=\{q\in\mathbb{H}\mid q\cdot q^*=1\}=\{\eta\in\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\mid\ \det\eta=1\ \&\ \eta^{-1}=\eta^*\}=\mathrm{SU}_2\,.$$

Эта группа действует на алгебре кватернионов по правилу

$$S^3\ni\psi\longmapsto F_\psi\ :\ \mathbb{H}\xrightarrow{q\mapsto\psi q\psi^*}\mathbb{H}\,. \tag{10-12}$$

(поскольку $\psi^*=\psi^{-1}$ это действие можно было бы описать и как *сопряжение* при помощи ψ).

Упражнение 10.9. Проверьте, что $F_{\varphi\psi}=F_\varphi\circ F_\psi$ и что $\forall\,\psi\in S^3$ линейный оператор F_ψ является автоморфизмом тела кватернионов, т. е. обратим и удовлетворяет соотношению $F_\psi(pq)=F_\psi(p)F_\psi(q)$.

Поскольку $\det(\psi q\psi^{-1})=\det q$, оператор F_ψ является евклидовой изометрией пространства $\mathbb{H}$, а так как он сохраняет $\boldsymbol{e}$, ограничение F_ψ на $I=\boldsymbol{e}^\perp$ является ортогональным преобразованием 3-мерного евклидова пространства I чисто мнимых кватернионов. Это преобразование собственное, поскольку может быть непрерывно продеформировано по сфере S^3 в тождественное преобразование $F_{\boldsymbol{e}}$. Итак, мы получаем гомоморфизм

$$S^3=\mathrm{SU}_2\xrightarrow{\psi\mapsto F_\psi|_I}\mathrm{SO}_{\det}(I)\simeq\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \tag{10-13}$$

[1]оно играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, поскольку редуцирует её к задаче о представимости простых чисел

[2]таким образом поля — это в точности коммутативные тела

Заметим, что $F_\psi(\psi) = \psi$, поэтому при $\psi \neq \boldsymbol{e}$ оператор F_ψ оставляет на месте двумерную плоскость

$$\Pi_\psi = \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{e} \oplus \mathbb{R}\cdot\psi\ ,$$

а значит, $F_\psi|_I$ является вращением вокруг прямой $\ell_\psi = \Pi_\psi \cap I$. Фиксируя на этой прямой один из двух чисто мнимых кватернионов $\boldsymbol{n}$ с $||\boldsymbol{n}|| = 1$, мы можем отождествить $\Pi_\psi = \Pi_{\boldsymbol{n}}$ с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ по правилу

$$\mathbb{C} \ni (x+iy) \longleftrightarrow (x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{n}) \in \Pi_{\boldsymbol{n}}\ . \tag{10-14}$$

При этом кватернион $\psi \in \mathbb{C}$ приобретает *аргумент* $\operatorname{Arg}\psi$.

Упражнение 10.10. Убедитесь, что $F_\psi|_I$ является поворотом вокруг прямой ℓ_ψ на угол $2\operatorname{Arg}(\psi)$, если смотреть вдоль орта $\boldsymbol{n} \in \ell_\psi$.

Из упр. 10.10 немедленно следует, что гомоморфизм (10-13) является двулистным накрытием с ядром $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$. Неформально говоря, взятие прообраза относительно (10-13) означает «извлечение корня» из вращения трёхмерного пространства.

Упражнение 10.11*. Если вы знакомы с основами топологии, покажите, что S^3 *односвязна*, т. е. что фундаментальными группа $\pi_1(S^3) = 1$. Чуть сложнее увидеть, что $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \pi_1(\mathbb{RP}_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Это означает, что отображение (10-13) является *универсальным накрытием*.

10.4. Эрмитовы структуры на $\mathbb{H}$. Операторы левого и правого умножения на любой чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{n}$ единичной нормы

$$\begin{aligned} I'_{\boldsymbol{n}}\ &:\ \mathbb{H} \xrightarrow{\eta\mapsto\boldsymbol{n}\eta} \mathbb{H} \\ I''_{\boldsymbol{n}}\ &:\ \mathbb{H} \xrightarrow{\eta\mapsto\eta\boldsymbol{n}} \mathbb{H} \end{aligned} \tag{10-15}$$

задают комплексные структуры на 4-мерном вещественном векторном пространстве $\mathbb{H}$, поскольку $\boldsymbol{n}^2 = -\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{n}^*/||\boldsymbol{n}||)\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}^{-1}\cdot\boldsymbol{n} = -1$ (отметим, что всякий кватернион $\boldsymbol{n}$ с $\boldsymbol{n}^2 = -1$ имеет $||\boldsymbol{n}|| = 1$ и $\boldsymbol{n}^{-1} = -\boldsymbol{n}$, откуда в силу (10-10) $\boldsymbol{n}^* = -\boldsymbol{n}$, т. е. такой кватернион автоматически чисто мним). Поскольку $\forall\ q \in \mathbb{H}\quad ||\boldsymbol{n}q|| = ||q\boldsymbol{n}|| = ||q||$, оба оператора (10-15) являются ортогональными, а это значит, что они продолжают евклидово скалярное произведение на $\mathbb{H}$ до келеровой тройки. Таким образом, мы получаем на $\mathbb{H}$ два семейства эрмитовых структур, параметризованные двумерной единичной сферой $S^2 \subset I$ чисто мнимых кватернионов нормы 1.

Покажем, что все эти структуры попарно различны. Операторы (10-15) переводят в себя двумерное вещественное пространство $\Pi_{\boldsymbol{n}} = \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{e} \oplus \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{n}$, которое естественно отождествляется с полем $\mathbb{C}$ как в (10-14) :

$$\mathbb{C} \ni (x+iy) \longleftrightarrow (x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{n}) \in \Pi_{\boldsymbol{n}}\ .$$

Ортогонал $\Pi_{\boldsymbol{n}}^\perp$ тоже переводится в себя обоими операторами $I'_{\boldsymbol{n}}$, $I''_{\boldsymbol{n}}$, так что вещественная плоскость $\Pi_{\boldsymbol{n}}^\perp$ является в обеих комплексных структурах комплексной прямой. Зафиксировав какой-нибудь чисто мнимый кватернион единичной нормы $\boldsymbol{m} \in \Pi_{\boldsymbol{n}}^\perp$, мы можем записать

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\cdot\boldsymbol{m} = \mathbb{C} \oplus \boldsymbol{m}\cdot\mathbb{C}\ , \tag{10-16}$$

что отвечает левому и правому действию «мнимой единицы» $\boldsymbol{n} \in \mathbb{C}$ на орт $\boldsymbol{m}$. В силу леммы n° 10.2.1 $I'_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{m}\boldsymbol{n} = -I''_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m})$. Таким образом, комплексные структуры, задаваемые операторами $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{\boldsymbol{n}}$ в плоскости $\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{n} \oplus \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{m}$ комплексно сопряжены одна другой (в частности, $I'_{\boldsymbol{n}} \neq I''_{\boldsymbol{n}}$), а комплексные числа (10-14) коммутируют с $\boldsymbol{m}$ по правилу

$$z\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}\cdot\overline{z} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\ . \tag{10-17}$$

Упражнение 10.12. Проверьте, что представление (10-16) аналогично представлению $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ поля $\mathbb{C}$ в виде «формально удвоенного» поля $\mathbb{R}$ в том смысле, что элементы $\mathbb{H}$ можно определить как формальные записи вида $z + w\boldsymbol{m}$, в которых $z, w \in \mathbb{C}$, формальный символ $\boldsymbol{m}$ удовлетворяет соотношениям (10-17) и $\boldsymbol{m}^2 = -1$, а кватернионное умножение $(z_1 + w_1\boldsymbol{m})(z_2 + w_2\boldsymbol{m})$ происходит по обычным правилам раскрытия скобок с учётом этих соотношений.

Из леммы n° 10.2.1 следует также, что плоскость $\Pi_{\boldsymbol{n}}$ не будет инвариантна ни для одного из операторов $I'_{\boldsymbol{m}}$, $I''_{\boldsymbol{m}}$ с $\boldsymbol{m} \neq \pm\boldsymbol{n}$, а оператору $-\boldsymbol{n}$ отвечает сопряжённая комплексная структура на плоскости $\Pi_{\boldsymbol{n}} = -\Pi_{\boldsymbol{n}}$. Таким образом, все комплексные структуры (10-15) действительно различны.

10.5. Спиноры и расслоение Хопфа. Как мы видели в n° 9.3.1, комплексные структуры на $\mathbb{H}$, продолжающие евклидово скалярное произведение до келеровой тройки, взаимно однозначно соответствуют двумерным изотропным подпространствам $\mathbb{C}$-билинейной формы $\widetilde{\det}$ на $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, т. е. прямолинейным образующим проективной квадрики Сегре[3]:

$$Q = \{\eta \in \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})) \mid \det(\eta) = 0\} \simeq \mathbb{P}_1^- \times \mathbb{P}_1^+ \,. \tag{10-18}$$

Напомню, что прямолинейные образующие детерминантной квадрики (10-18) распадаются на два семейства, параметризованные комплексными проективными прямыми[4]

$$\mathbb{P}_1^- = \mathbb{P}(U^*)\,, \quad \mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U)\,, \qquad \text{где} \quad U \simeq \mathbb{C}^2\,, \tag{10-19}$$

и отождествление (10-18) сопоставляет ковектору $\xi = (\zeta_0, \zeta_1) \in U^*$ и вектору $v = (z_0, z_1)^t \in U$ матрицу

$$u \cdot \xi = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot (\zeta_0, \zeta_1) = \begin{pmatrix} z_0\zeta_0 & z_0\zeta_1 \\ z_1\zeta_0 & z_1\zeta_1 \end{pmatrix}$$

оператора $v \otimes \xi : u \longmapsto \xi(u) \cdot v \in U$ ранга 1. Пространство, точки которого параметризуют максимальные изотропные подпространства проективной квадрики, называется *многообразием спиноров*[5] (или *изотропным грассманианом*).

На бескоординатном языке пространство $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ есть не что иное как $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$, а обсуждавшиеся нами в n° 10.1 инволюции на этом пространстве отвечают фиксации на U двух дополнительных структур — эрмитова скалярного произведения $h(*,*)$ и $\mathbb{C}$-билинейной кососимметричной формы «ориентированной» площади[6] $\delta(*,*)$, согласованной с эрмитовой структурой в том смысле, что ориентированная площадь всех ортонормальных базисов по модулю равна единице. Это даёт две невырожденных корреляции $U \xrightarrow{\sim} U^*$, действующие по правилам

$$u \longmapsto \widehat{\delta}(u) = \delta(*, u)\,, \qquad u \longmapsto \widehat{h}(u) = h(*, u) \tag{10-20}$$

(первая $\mathbb{C}$-линейна, а вторая $\mathbb{C}$-антилинейна), и две инволюции на $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$, отвечающие сопряжению операторов относительно этих форм:

$$F \longleftrightarrow F^{\times} = \widehat{\delta}^{\;-1} F^t \widehat{\delta} \quad \text{и} \quad F \longleftrightarrow F^* = \widehat{h}^{\;-1} F^t \widehat{h} \;:$$
$$\delta(Fu, v) = \delta(u, F^{\times} v)\,, \quad (Fu, v) = (u, F^* v)\,,$$

где через $U^* \xleftarrow{F^t} U^*$ обозначен оператор, двойственный к $U \xrightarrow{F} U$ в абсолютном смысле, т. е. такой что $F^t\xi(u) = \xi(Fu) \quad \forall\, \xi \in U^* \quad \forall\, u \in U$.

Упражнение 10.13. Проверьте, что в ортонормальном базисе единичной площади[7] действие этих двух инволюций на матрицу оператора описывается формулами (10-1), (10-3), а также что

$$\widehat{\delta} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = (z_1, -z_0)\,, \qquad \widehat{h} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = (\overline{z}_0, \overline{z}_1)\,.$$

[3] ср. с n° 2.4.7, где надо положить $U_- = U_+ = U$

[4] поскольку топологически $\mathbb{P}_1 \simeq S^2$, это хорошо согласуется с описанными выше двумя семействами эрмитовых структур (10-15), которые тоже параметризовались двумерной единичной сферой $S^2 \subset I$

[5] физики обычно называют точки на $\mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U)$ «спинорами», а точки на $\mathbb{P}_1^- = \mathbb{P}(U^*)$ «спинорами противоположной киральности»; этимология этих названий отчасти объясняется в §§ 9, 11 второй части книги *А. И. Кострикин, Ю. И. Манин . Линейная алгебра и геометрия.* (М., изд. МГУ, 1980, стр. 176)

[6] напомню, что на n-мерном векторном пространстве имеется единственный с точностью до пропорциональности ориентированный объём, который является кососимметричной функцией от n векторов, линейной по каждому аргументу, и при $n = 2$ такую форму уместно называть площадью; эпитет «ориентированная» был забран в кавычки, поскольку над полем $\mathbb{C}$ он не очень уместен: равные по модулю площади различаются над $\mathbb{C}$ не знаком, а «фазовым множителем», который пробегает единичную окружность

[7] т. е. таком, где $\delta(e_1, e_2) = 1$

Кроме того, убедитесь, что $\widehat{h}^{-1}\widehat{\delta} = -\widehat{\delta}^{-1}\widehat{h}$ и при каноническом отождествлении U с U^{**} сопряжённые[8] к $\widehat{\delta}$ и $\widehat{h}$ операторы имеют вид $\widehat{\delta}^{\,t} = -\widehat{\delta}$ и $\widehat{h}^{\,t} = \widehat{h}$.

Вещественная структура σ из (10-5) очевидно переводит детерминантную квадрику (10-18) в себя. Поскольку на Q нет вещественных точек[9], а непустое пересечение $\ell\cap\sigma(\ell)$ пары различных лежащих на Q σ-сопряжённых прямых было бы именно такой точкой, мы заключаем, что σ переводит каждую лежащую на Q прямую в прямую из того же семейства, т. е. индуцирует не имеющую неподвижных точек инволюцию $\mathbb{P}_1^{\pm} \xrightarrow{\sigma_{\pm}} \mathbb{P}_1^{\pm}$ на каждой из прямых $\mathbb{P}_1^{\pm}$.

Упражнение 10.14. Проверьте, что $\sigma(F) = \sigma_+^{-1}F\sigma_+$, где $U \xrightarrow{\sigma_+} U$ определяется формулами

$$\sigma_+ = \left(\widehat{h}^{\,-1}\right)^t \delta = \widehat{h}^{\,-1}\widehat{\delta} = -\widehat{\delta}^{\,-1}\widehat{h} = \left(\widehat{\delta}^{\,-1}\right)^t \widehat{h}\ ,$$

и что в ортонормальном базисе единичной площади действие σ_+ и $\sigma_- = \sigma_+^t$ описывается формулами

$$\sigma_+\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ -\overline{z}_0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_-(w_0,w_1) = (-\overline{w}_1, \overline{w}_0)\ .$$

Согласно n° 2.4.7, для каждой пары σ_+-сопряжённых спиноров $u, u' \in \mathbb{P}(U)$ прямые $\mathbb{P}_1^- \times u$ и $\mathbb{P}_1^- \times u'$ суть проективизации двумерных пространств L_u, L'_u, состоящих из операторов ранга 1, образ которых порождается векторами u и u' соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1^- \times u = \mathbb{P}\left(L_u\right) = \{F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) \mid \mathrm{im}\,(F) = \mathbb{C}\cdot u\} \\ \mathbb{P}_1^- \times u' = \mathbb{P}\left(L'_u\right) = \{F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) \mid \mathrm{im}\,(F) = \mathbb{C}\cdot u'\}\ . \end{aligned}$$

Поэтому оператор левого умножения $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) \xrightarrow{X\mapsto\psi_u X} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$ на косоэрмитов оператор $\psi_u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$, такой что $\psi_u(u) = iu$, $\psi_u(u') = -iu'$, имеет подпространства L_u, $L'_u = \sigma(L_u)$ в качестве собственных подпространств, отвечающих собственным значениям $+i$ и $-i$ соответственно, т. е. задаёт на $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ комплексную структуру, соответствующую изотропному подпространству $\mathbb{P}(L_u) \subset Q$. Матрицу оператора ψ_u в ортонормальном базисе единичной площади легко выписать явно. Если

$$u = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}\ , \quad u' = \sigma_+(u) = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ -\overline{z}_0 \end{pmatrix}\ ,$$

то умножая, если надо, представляющий наш спинор вектор $u \in U$ на положительную вещественную константу, мы можем считать, что

$$\det\begin{pmatrix} z_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -\overline{z}_0 \end{pmatrix} = -||u||_h = -1\ , \quad \text{а значит}\ , \quad \begin{pmatrix} z_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -\overline{z}_0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{z}_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -z_0 \end{pmatrix}\ ,$$

и тогда

$$\psi_u = \begin{pmatrix} z_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -\overline{z}_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -\overline{z}_0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i\left(|z_0|^2 - |z_1|^2\right) & 2i\,z_0\overline{z}_1 \\ 2i\,\overline{z}_0 z_1 & i\left(|z_1|^2 - |z_0|^2\right) \end{pmatrix} \tag{10-21}$$

Таким образом, мы явно сопоставили каждому спинору $u \in \mathbb{P}(U)$ чисто мнимый кватернион с квадратом -1, левое умножение на который задаёт на $\mathbb{H}$ комплексную структуру, отвечающую изотропной прямой $\mathbb{P}_1^- \times u \subset Q$.

Упражнение 10.15. Покажите, что правое умножение на ψ_u задаёт на $\mathbb{H}$ комплексную структуру, отвечающую прямой $\widehat{\delta}(u) \times \mathbb{P}_1^+$ из второго семейства.

---

[8]отметим, что оператор $U^* \xleftarrow{f^t} V^*$ между двойственными (над $\mathbb{C}$) комплексными пространствами, сопряжённый к $\mathbb{C}$-антилинейному оператору $U \xrightarrow{f} V$ в том смысле, что $f*\xi(u) = \xi(fu) \quad \forall\,\xi\in U^*$, автоматически будет тоже $\mathbb{C}$-антилинеен

[9]напомню, что ограничение формы det на $\mathrm{Re}_\sigma = \mathbb{H}$ положительно определено

10.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Все комплексные структуры на $\mathbb{H}$, продолжающие кватернионную норму до келеровой тройки, исчерпываются левыми и правыми умножениями на чисто мнимые кватернионы нормы 1, а формула* (10-21) *задаёт взаимно однозначное соответствие между такими кватернионами и спинорами*[10] $u \in \mathbb{P}(U)$. □

Упражнение 10.16* (расслоение Хопфа). Убедитесь, что правая часть формулы (10-21) не меняется при изменении фазы спинора u (т.е. при замене $u \mapsto \vartheta u$ с $|\vartheta| = 1$). Таким образом, формула (10-21) задаёт гладкое сюрьективное отображение трёхмерной сферы на двумерную:

$$\{u \in U \simeq \mathbb{C}^2 \mid ||u||_h = 1\} = S^3 \xrightarrow{\psi} S^2 = \{\boldsymbol{n} \in I \simeq \mathbb{R}^3 \mid ||\boldsymbol{n}||_{\mathbb{H}} = 1\}\,,$$

слоями которого являются единичные окружности. Если Вы владеете основами топологии, покажите, что это локально тривиальное расслоение[11], не изоморфное тривиальному расслоению

$$S^2 \times S^1 \longrightarrow S^2\,.$$

[10]напомним, что в (10-21) вектор $u \in U$, представляющий точку из $\mathbb{P}(U)$, предполагается нормированным так, что $||u||_h = 1$ в эрмитовой структуре на U

[11]оно называется *расслоением Хопфа*