§8. Эрмитова геометрия.

8.1. Эрмитова структура. Комплексное векторное пространство W (без какой-либо фиксированной вещественной структуры), оснащённое вещественно билинейным скалярным произведением

$$W \times W \xrightarrow{w_1, w_2 \mapsto (w_1, w_2)} \mathbb{C}\,, \tag{8-1}$$

которое обладает свойствами

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= \overline{(w_2, w_1)} && \text{(эрмитова симметричность)} \\ (z\, w_1, w_2) &= z\,(w_1, w_2) = (w_1, \overline{z}\, w_2) && \text{(полуторалинейность)} \\ (w, w) &> 0 \quad \forall\, w \neq 0 && \text{(положительность)}\,, \end{aligned} \tag{8-2}$$

называется *эрмитовым* (или *унитарным*), а само произведение (8-1) называется *эрмитовой* (или *унитарной*) структурой на W. Из эрмитовой симметричности вытекает, что матрица Грама эрмитова произведения любого набора векторов $\{e_i\} \subset W$ удовлетворяет условию[1]

$$G^t = \overline{G}\,.$$

При линейной замене векторов $(e'_1, e'_2, \dots, e'_m) = (e_1, e_2, \dots, e_k) \cdot C$ матрица Грама, ввиду антилинейности произведения (8-1) по второму аргументу, меняется по правилу

$$G' = C^t \cdot G \cdot \overline{C}\,.$$

Как и в евклидовом случае, произвольный базис $\{w_i\}$ эрмитова пространства W можно модифицировать в *ортонормированный* базис $\{e_i\}$ с единичной матрицей Грама так, чтобы линейная оболочка первых k базисных векторов в обоих базисах была одинакова $\forall\, k = 1,\, 2\, \dots\,,\, n$.

Упражнение 8.1. Проверьте, что набор векторов $e_m = u_m / \sqrt{(u_m, u_m)}$, где $u_m = w_m - \sum\limits_{\nu=1}^{m-1} (w_m, e_\nu)$ и $u_1 = w_1$, удовлетворяет этому свойству.

Из этого вытекает, что определитель Грама любого линейно независимого набора векторов является *вещественным положительным* числом, ибо имеет вид

$$\det G = \det C^t \det \overline{C} = |\det C|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

для квадратной комплексной невырожденной матрицы C, выражающей заданный набор векторов через ортонормальный базис их линейной оболочки.

Упражнение 8.2. Проверьте, что определитель Грама линейно зависимого набора векторов равен нулю.

Положительность определителя Грама набора из двух векторов v, w даёт эрмитову версию неравенства Коши-Буняковского – Шварца

$$|(v, w)|^2 \leqslant (v, v) \cdot (w, w)\,,$$

которое, как и в евклидовом случае, влечёт неравенство треугольника

$$||w_1|| + ||w_2|| \geqslant ||w_1 + w_2||\,, \quad \forall\, w_1, w_2 \in W$$

для *эрмитовой нормы* $||w|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Как и в евклидовом случае, эрмитова структура однозначно восстанавливается по эрмитовой норме вследствие соотношений

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2, w_1 + w_2) &= ||w_1||^2 + ||w_2||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(w_1, w_2) \\ (w_1 + i w_2, w_1 + i w_2) &= ||w_1||^2 + ||w_2||^2 - 2i\,\mathrm{Im}\,(w_1, w_2)\,, \end{aligned}$$

[1] такие комплексные матрицы называются *эрмитово симметричными*

из которых вытекает, что

$$2(w_1, w_2) = ||w_1 + w_2||^2 - ||w_1 + iw_2||^2 \, . \tag{8-3}$$

8.1.1. Пример: углы между комплексными прямыми. Первое отличие эрмитовой геометрии от евклидовой возникает при попытке определить угол между векторами. Напомним (см. n° 5.6), что в евклидовом случае угол $\widehat{vw}$ определяется как единственное вещественное число $\varphi \in [0, \pi]$ удовлетворяющее соотношению

$$\cos\varphi = \frac{(v, w)}{||v|| \cdot ||w||} = \left(\frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||}\right) \, , \tag{8-4}$$

правая часть которого является вещественным числом, лежащим (вследствие неравенства Коши-Буняковского-Шварца) на $[-1, 1]$. В комплексном случае правая часть (8-4) является *комплексным числом*, и углом между векторами эрмитова пространства, по определению, называют число $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, удовлетворяющее соотношению

$$\cos\psi = \frac{|(v, w)|}{||v|| \cdot ||w||} = \left|\left(\frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||}\right)\right| \, , \tag{8-5}$$

правая часть которого принадлежит $[0, 1]$ в силу эрмитовой версии неравенства Коши-Буняковского-Шварца. В евклидовом мире векторы $v/||v||$ и $w/||w||$ фиксируют один из двух возможных выборов *ортонормального базиса* на каждой из прямых $\mathbb{R} \cdot v$ и $\mathbb{R} \cdot w$ и правая часть формулы (8-5) давала бы *наименьший* из четырёх углов, на которые эти две прямые *разбивают* вещественную плоскость, натянутую на v, w. В комплексном мире комплексные (вещественно двумерные) прямые $\mathbb{C} \cdot v$ и $\mathbb{C} \cdot w$ *не разбивают* комплексную плоскость $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ натянутую на v, w, а ортонормальные базисы образуют на каждой из этих прямых целую единичную окружность. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной вещественной единичной 3-сфере в $\mathbb{C} \cdot v \oplus \mathbb{C} \cdot w \simeq \mathbb{R}^4$.

Упражнение 8.3. Проверьте, что формула (8-5) вычисляет минимальную из длин дуг, высекаемых на единичной 3-сфере всевозможными двумерными вещественными плоскостями, проходящими через пары точек, лежащих на единичных окружностях в плоскостях $\mathbb{C} \cdot v$ и $\mathbb{C} \cdot w$.

8.1.2. Пример: унитарная группа (эрмитовы изометрии). Линейный оператор $W \xrightarrow{F} W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если он сохраняет эрмитову норму: $||Fw|| = ||w|| \quad \forall w \in W$. Такие операторы образуют *унитарную группу* $\mathrm{U}(W)$. Согласно (8-3), каждый унитарный оператор автоматически сохраняет и скалярное произведение: $(Fv, Fw) = (v, w) \; \forall \; v, w \in W$, и потому его матрица в произвольном базисе связана с матрицей Грама этого базиса соотношением

$$F^t \cdot G \cdot \overline{F} = G \, .$$

В частности, унитарный оператор обратим и $F^{-1} = \overline{G}^{-1} \overline{F}^t \overline{G} = G^{t\,-1} \overline{F}^t G^t$. В ортонормальном базисе это соотношение редуцируется до $F^t \overline{F} = E$ или $F^{-1} = \overline{F}^t$, откуда вытекает, что $|\det F| = 1$. Такие матрицы размера $n \times n$ образуют *группу унитарных матриц*

$$\mathrm{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \overline{F}^t\} \, .$$

Её подгруппа $\mathrm{SU}_n = \{F \in \mathrm{U}_n \mid \det F = 1\}$ называется *специальной* унитарной группой. Подчеркнём, что определитель произвольной унитарной матрицы вовсе не обязан равняться ± 1 (как это было с евклидовыми изометриями) и может принимать любое значение на единичной окружности

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\} \, ,$$

так что в эрмитовом пространстве нет никакого аналога ориентации, и эрмитовы изометрии не разбиваются на два несвязных класса.

Упражнение 8.4. Покажите, что U_n является компактным связным подмножеством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

8.1.3. Пример: эрмитов объём. Выбирая произвольный ортонормальный базис $\{e_i\}$ в качестве базиса единичного объёма, мы можем корректно определить абсолютный (неориентированный) объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном эрмитовом пространстве W по формуле

$$\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) = |\det C| \, , \quad \text{где} \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C \, .$$

Поскольку модуль определителя матрицы перехода между ортонормальными базисами равен единице, такой объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, и квадрат объёма будет, как и в евклидовом случае, равен определителю Грама: $\mathrm{vol}^2(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det((v_i, v_j))$.

8.1.4. Пример: ортогональные проекторы. Для любого подпространства $U \subset W$ множество векторов

$$U^{\perp} = \{w \in W \mid (u,w) = 0 \ \ \forall\, u \in U\ \}$$

составляет подпространство, называемое *ортогоналом* к U. В действительности сумма $U \oplus U^{\perp} = V$ является прямой, и *ортогональный проектор* $W \xrightarrow{\pi} U$ вдоль $U^{\perp}$ может быть описан как единственный линейный оператор, удовлетворяющий соотношению $(u, \pi(w)) = (u, w) \quad \forall\, w \in W$.

Упражнение 8.5. Докажите это, а также, что $\pi(w) = \sum (w, u_\nu) \cdot u_\nu$ для любого ортонормального базиса $\{u_\nu\}$ в U и является ближайшей к концу вектора w точкой подпространства U.

Поскольку ортогональное дополнение к инвариантному подпространству изометрического оператора также является инвариантным, собственные подпространства любого унитарного оператора составляют ортогональную прямую сумму, совпадающую со всем пространством. Мы получаем

8.1.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякий унитарный оператор диагонализуется в некотором ортонормальном базисе, причём диагональные элементы будут иметь единичный модуль.* □

8.2. Эрмитово сопряжение операторов. На пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ комплексно линейных эндоморфизмов произвольного эрмитова пространства имеется вещественная структура, задаваемая оператором *сопряжения* $F \longmapsto F^*$, который определяется равенством

$$(F^* v, w) = (v, Fw) \ , \quad \forall\, w_1, w_2 \in W \ .$$

В терминах матриц это соотношение означает, что $F^{*t} \cdot G = G \cdot \overline{F}$, откуда

$$F^* = G^{-1t} \cdot \overline{F}^t \cdot G^t = \overline{G^{-1}} \cdot \overline{F}^t \cdot \overline{G} \ .$$

В частности, в ортонормальном базисе $F^* = \overline{F}^t$, откуда $F^{**} = F$ и $(zF)^* = \overline{z} F^* \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Итак, инволюция $F \leftrightarrow F^*$ действительно задаёт на $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ *вещественную структуру*

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) = \mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) \oplus \mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W) \ ,$$

с $\mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^* = F\}$, $\mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^* = -F\}$. Вещественное подпространство $\mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W)$ этой структуры называется пространством *самосопряжённых* операторов, а чисто мнимое подпространство $\mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W)$ называется пространством *антисамосопряжённых* операторов. В ортонормированном базисе самосопряжённые операторы задаются *эрмитово симметричными* матрицами $F^t = \overline{F}$, а антисамосопряжённые — *эрмитово кососимметричными* матрицами $F^t = -\overline{F}$. Разложение произвольного оператора в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого имеет вид $F = \frac{1}{2}\,(F + F^*) + \frac{1}{2}\,(F - F^*)$. Сопряжение является *антигомоморфизмом* алгебры $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в том смысле, что $(FG)^* = G^* F^*$.

Упражнение 8.6. Убедитесь непосредственно, что эрмитово (косо) симметричные матрицы меняют тип симметрии на противоположный при умножении на i, а также что изометрии можно охарактеризовать как операторы, сопряжённые своему обратному $F^* = F^{-1}$.

8.2.1. Сопряжение операторов на евклидовом пространстве. На алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ вещественного евклидова пространства V тоже есть сопряжение $F \leftrightarrow F^*$, задаваемое тем же правилом $(F^* v, w) = (v, Fw) \ \forall\, w_1, w_2 \in W$. Эта операция является сужением операции эрмитова сопряжения на комплексифицированном пространстве $W = V_{\mathbb{C}}$ относительно эрмитовой структуры, являющейся эрмитовым продолжением евклидова скалярного произведения на V. В терминах (вещественных) матриц $F^* = G^{-1} \cdot F^t \cdot G$. В ортонормальном базисе (анти) самосопряжённые операторы имеют (косо) симметричные матрицы, и любая матрица однозначно раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной:

$$F = \frac{1}{2}\,\left(F + F^t\right) + \frac{1}{2}\,\left(F - F^t\right) \ .$$

Евклидовы изометрии тоже характеризуются как операторы, сопряжённые к своим обратным.

8.2.2. Пример: сопряжение дифференциальных операторов. Пусть V — пространство бесконечно гладких функций $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, зануляющихся на концах отрезка вместе со всеми своими производными. Введём на V евклидову структуру

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\,.$$

Оператор дифференцирования $d/dt\;:\;f \longrightarrow f'$ является антисамосопряжённым, как показывает интегрирование по частям:

$$(df/dt, g) = \int\limits_a^b f'g\,dt = -\int\limits_a^b fg'\,dt = (f, -dg/dt)\,.$$

Оператор умножения на фиксированную функцию, очевидно, самосопряжён. Поскольку сопряжение является антиэндоморфизмом алгебры операторов, оператор, сопряжённый, к примеру, с линейным дифференциальным оператором

$$t^3\frac{d^2}{dt^2}\;:\;f(t) \longmapsto t^3 f''(t)\,,$$

действует по правилу $\left[t^3\frac{d^2}{dt^2}\right]^*\;:\;f(t) \longmapsto \left(t^3 f(t)\right)'' = \left[t^3\frac{d^2}{dt^2} + 6t^2\frac{d}{dt} + 6t\right]\,f(t)\,.$

Упражнение 8.7. В условиях примера вычислите оператор, сопряжённый к оператору

$$L = a(t)\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t)\;:\;f \longmapsto af'' + bf + c$$

где $a,b,c \in V$.

8.3. Нормальные операторы. Оператор F на эрмитовом пространстве W называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряжённым оператором: $F^*\cdot F = F\cdot F^*$. В частности, нормальными являются (анти) самосопряжённые и унитарные операторы, для которых F^* равен $\pm F$ и F^{-1} соответственно. Мы собираемся показать, что нормальность оператора равносильна тому, что оператор приводится к диагональному виду в *ортогональном* базисе. Доказательство основано на одном общем свойстве перестановочных операторов.

8.3.1. Замечание о перестановочных операторах. Если два линейных оператора F, G на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ перестановочны (т. е. $FG = GF$), то ядро и образ любого многочлена от одного из них будут инвариантными подпространствами для другого:

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \quad &&\Rightarrow \quad G\Big(\ker\big(f(F)\big)\Big) \subset \ker\big(f(F)\big)\,,\\ v = f(F)w \quad &\Rightarrow \quad Gv = Gf(F)w = f(F)Gw \quad &&\Rightarrow \quad G\Big(\mathrm{im}\,\big(f(F)\big)\Big) \subset \mathrm{im}\,\big(f(F)\big)\,. \end{aligned}$$

В частности, собственные подпространства[2] $\ker(F-\lambda E)$ оператора F будут переходить под действием G в себя. Следующее следствие этого наблюдения используется особенно часто:

8.3.2. ЛЕММА. *Над алгебраически замкнутым полем любое множество коммутирующих операторов обладает общим собственным вектором. Над произвольным полем любое множество диагонализуемых коммутирующих операторов может быть диагонализовано одновременно в одном общем для всех операторов базисе.*

Доказательство. Индукция по размерности пространства. Если все операторы скалярны (а в одномерном пространстве это так), годится любой вектор. Если среди операторов есть нескалярный, то его собственные подпространства имеют меньшую размерность и инвариантны для всех операторов. □

8.3.3. ТЕОРЕМА. *Следующие условия на оператор F в эрмитовом пространстве W попарно эквивалентны:* (1) *F нормален;* (2) *F диагонализуется в некотором ортонормальном базисе;*

[2] равно как и корневые подпространства $\bigcup\limits_m \ker(F-\lambda E)^m$

(3) *ортогональное дополнение к любому собственному подпространству оператора F переводится оператором F в себя. При этом диагональные элементы в (2) с точностью до перестановки не зависят от выбора диагонализующего базиса.*

Доказательство. Условия (2) и (3) очевидно равносильны. Из (2) вытекает (1), поскольку в ортонормальном базисе матрица оператора, сопряжённого к диагональному, также будет диагональной, а любые две диагональные матрицы коммутируют. Покажем теперь, что из (1) вытекает (3). Пусть U собственное для F с собственным значением λ. Из условия (1) и n° 8.3.1 следует, что F^* переводит U в себя. Тогда для любого $w \in U^\perp$ мы имеем $(Fw, u) = (w, F^*u) = 0$ для всех $u \in U$, откуда $Fw \in U^\perp$. Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что (с учётом кратностей) набор диагональных элементов совпадает с набором корней характеристического многочлена. □

8.3.4. СЛЕДСТВИЕ. *Самосопряжённые операторы — это в точности нормальные операторы с вещественными собственными значениями, а антисамосопряжённые — это нормальные операторы с чисто мнимыми собственными значениями.* □

8.3.5. СЛЕДСТВИЕ. *Унитарные операторы — это в точности нормальные операторы с собственными значениями по модулю равными единице.* □

Упражнение 8.8. Докажите, что ортогональное дополнение к любому (не обязательно собственному) инвариантному подпространству нормального оператора также будет инвариантным.

Упражнение 8.9. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, имеющие различные собственные значения, ортогональны, и что любой ортонормированный набор собственных векторов можно дополнить до ортонормального базиса из собственных векторов.

8.3.6. Нормальные операторы в евклидовом пространстве. Нормальные операторы в вещественном евклидовом пространстве V определяются тем же условием $F^*F = FF^*$. Если продолжить евклидову структуру на V до эрмитовой структуры на комплексифицированном пространстве $V_\mathbb{C}$, то нормальность, (анти) самосопряжённость и изометричность операторов по отношению к евклидовой структуре на V перейдут при комплексификации в те же свойства по отношению к эрмитовой структуре, поскольку матрица комплексифицированного оператора $F_\mathbb{C}$ в вещественном ортонормальном базисе пространства $V_\mathbb{C}$ останется той же, что у F. Применяя к таким операторам теорему n° 8.3.3 и группируя (когда понадобится) их невещественные собственные векторы и собственные значения в пары комплексно сопряжённых, получаем:

8.3.7. СЛЕДСТВИЕ. *Самосопряжённый оператор в евклидовом пространстве обладает ортонормированным базисом из собственных векторов.* □

8.3.8. СЛЕДСТВИЕ. *Антисамосопряжённый оператор в евклидовом пространстве в подходящем ортонормированном базисе имеет блочно диагональную матрицу вида*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_\nu \\ -a_\nu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a_\nu \in \mathbb{R}$$

□

Упражнение 8.10. Получите из следствия n° 8.3.5 нормальный вид евклидова ортогонального оператора, описанный в n° 7.4.2.

Упражнение 8.11. К какому виду приводится в подходящем ортонормальном базисе евклидова пространства произвольный нормальный оператор?

8.4. Полярное разложение операторов обобщает хорошо известное представление комплексных чисел в полярных координатах

$$z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}, \tag{8-6}$$

где $\varrho = |z|$ вещественно и положительно при $z \neq 0$, а $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \in U_1$. Для любого линейного оператора $F \in \mathrm{GL}(W)$ на эрмитовом пространстве W операторы FF^* и F^*F будут самосопряжены, а их (автоматически вещественные) собственные значения будут неотрицательны, а при $\det F \neq 0$ строго положительны, поскольку

$$FF^*v = \lambda v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (v,v) = (\lambda v, v) = (FF^*v, v) = (F^*v, F^*v) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(v,v)}{(F^*v, F^*v)} > 0\,,$$
$$F^*Fv = \lambda v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (v,v) = (\lambda v, v) = (F^*Fv, v) = (Fv, Fv) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(v,v)}{(Fv, Fv)} > 0\,.$$

Приведём эти операторы к диагональному виду и обозначим через $S_1 = \sqrt{FF^*}$, $S_2 = \sqrt{F^*F}$, диагональные операторы, получающиеся извлечением положительных квадратных корней из стоящих на диагонали элементов. Операторы $S_{1,2}$ также самосопряжены и положительны, причём S_1 коммутирует с FF^* и имеет $S_1^2 = FF^*$, а S_2 коммутирует с F^*F и имеет $S_1^2 = F^*F$. Если F обратим, то $S_{1,2}$ тоже обратимы, и мы можем образовать операторы $I_1 = S_1^{-1}F$ и $I_2 = FS_2^{-1}$, которые оказываются унитарными:

$$(I_1u, I_1w) = (S_1^{-1}Fu, S_1^{-1}Fw) = (F^*S_1^{-2}Fu, w) = (F^*(FF^*)^{-1}Fv, w) = (u,w)\,,$$
$$(I_2u, I_2w) = (FS_2^{-1}u, FS_2^{-1}w) = (u, S_2^{-1}F^*FS_2^{-1}w) = (v, F^*FS_2^{-2}w) = (u,w)\,.$$

Итак, для любого обратимого оператора на эрмитовом пространстве имеются два разложения в композицию унитарного оператора и самосопряжённого оператора с положительными собственными числами

$$F = S_1I_1 = I_2S_2\,.$$

Эти разложения называются *полярными разложениями* оператора F. Оба сомножителя каждого из разложений определяются по F однозначно. Действительно, $I_1^* = I_1^{-1}$ и $F = I_1S_1$ влекут $F^*F = S_1^2$, а значит, S перестановочен с FF^* и действует на каждом собственном подпространстве $\ker(FF^* - \lambda E)$ как положительный скаляр $\sqrt{\lambda}$, как мы и задали его выше (однозначность разложения $F = I_2S_2$ устанавливается аналогично).

Упражнение 8.12. Покажите, что $F^*F = FF^* \iff I_1 = I_2 \;\&\; S_1 = S_2 \iff I_1S_1 = S_1I_1 \iff I_2S_2 = S_2I_2$.

Упражнение 8.13. Покажите, что всякий обратимый оператор в вещественном евклидовом пространстве единственным образом раскладывается в левую и правую композиции ортогонального оператора и самосопряжённого оператора с положительными собственными числами.

Следующая ниже лемма позволяет при желании записать полярное разложение в виде

$$F = Se^{iT}\,,$$

буквально обобщающем (8-6). Здесь оба оператора S, T самосопряжены, S положителен и однозначно определяется по F (как и выше), но собственные значения T произвольны, и различным T может отвечать один и тот же оператор $I = e^{iT}$.

8.4.1. ЛЕММА. *Отображение $A \longmapsto e^A = \sum\limits_{m\geqslant 0} A^m/m!$ корректно определено и сюрьективно отображает пространство косоэрмитовых матриц на пространство унитарных матриц.*

Доказательство. Используя в качестве нормы на пространстве матриц сумму квадратов модулей матричных элементов нетрудно убедиться, что экспоненциальный ряд абсолютно сходится на всём пространстве матриц равномерно на каждом компакте (обязательно убедитесь в этом). Поскольку $e^{CAC^{-1}} = Ce^AC^{-1}$, для вычисления экспоненты можно воспользоваться базисом, в котором матрица косоэрмитова оператора диагональна с чисто мнимыми собственными значениями. В этом базисе матрица e^A также будет диагональна с собственными значениями, по модулю равными единице, т. е. будет матрицей унитарного оператора. Наоборот, приводя произвольный унитарной оператор к диагональному виду, убеждаемся, что он может быть записан как e^A для некоторой диагональной матрицы A с чисто мнимыми диагональными элементами. $\square$