§7. Комплексификация и овеществление.

7.1. Овеществление. Произвольное n-мерное комплексное векторное пространство W можно рассматривать и как вещественное векторное пространство, считая что умножение векторов $w \in W$ на вещественные константы индуцировано каноническим вложением $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и имеющимся в W умножением на комплексные константы. Мы будем называть получающееся таким образом вещественное векторное пространства *овеществлением* комплексного пространства W и обозначать $W_{\mathbb{R}}$. Дабы избежать недоразумений, условимся также писать $\dim_{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}}$ для обозначения размерности над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно.

Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляли базис W над $\mathbb{C}$, то векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ie_2, \dots, ie_n \tag{7-1}$$

будут составлять базис $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, поскольку единственность разложения произвольного $w \in W$ в виде

$$w = \sum (x_\nu + i\, y_\nu) \cdot e_\nu \quad \text{с} \quad (x_\nu + i\, y_\nu) \in \mathbb{C} \tag{7-2}$$

равносильна единственности разложения того же вектора в виде

$$w = \sum x_\nu \cdot e_\nu + \sum y_\nu \cdot ie_\nu \quad \text{с} \quad x_\nu,\, y_\nu \in \mathbb{R} \tag{7-3}$$

В частности $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W$, и вещественные пространства, получающиеся овеществлением из комплексных всегда чётномерны.

7.1.1. Сравнение линейных групп. Все комплексно линейные операторы $W \xrightarrow{F} W$ составляют алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ над полем $\mathbb{C}$, а все вещественно линейные операторы $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{G} W_{\mathbb{R}}$ образуют алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ над полем $\mathbb{R}$, содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})\ .$$

Чтобы явно описать эту подалгебру в матричных терминах, зафиксируем базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n \tag{7-4}$$

пространства W над $\mathbb{C}$ и индуцированный базис (7-1) пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Алгебра $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ отождествится при этом с алгеброй $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера $n \times n$, а алгебра $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ отождествится с алгеброй $\mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $(2n) \times (2n)$. Будем записывать вещественные матрицы в блочном виде

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{7-5}$$

в соответствии с разбиением базиса (7-1) на два набора по n векторов $\{e_\nu\}$ и $\{ie_\nu\}$. Вещественно линейный оператор G с матрицей (7-5) является комплексно линейным тогда и только тогда, когда $F(iw) = iF(w)$ для всех $w \in W_{\mathbb{R}}$. Ясно, что это условие достаточно проверять только на вещественных базисных векторах e_ν и ie_ν. Мы получаем:

7.1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (УСЛОВИЯ КОШИ – РИМАНА). *Вещественно линейный оператор* (7-5) *тогда и только тогда комплексно линеен, когда $C = B$ и $D = -A$. При этом в базисе* (7-4) *пространства W над $\mathbb{C}$ такой оператор будет задаваться комплексной $n \times n$-матрицей $A + iB$.* $\square$

7.1.3. Пример: комплексно дифференцируемые функции $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$. Пусть $W = \mathbb{C}$, $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, комплексный базис (7-4) — это $e = 1$ и ассоциированный вещественный базис (7-1) — это $\{1, i\}$. Комплексно линейный оператор $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ в этом случае есть просто оператор умножения на какое-нибудь ненулевое комплексное число $z = a + ib$. В базисе $\{1, i\}$ такой оператор записывается 2×2-матрицей

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Произвольную функцию $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ можно воспринимать либо как функцию $w = f(z)$ одной комплексной переменной, либо как пару функций двух вещественных переменных

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} ,$$

полагая $w = u + iv$ и $z = x + iy$ с $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Напомним, что такая функция называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если её приращение (как функции от z) имеет вид

$$f(z_0 + \vartriangle z) = f(z_0) + \zeta \cdot \vartriangle z + o(\vartriangle z) , \qquad \text{где} \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

и называется *вещественно дифференцируемой*, если

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \\ v(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} + o(\vartriangle x, \vartriangle y) , \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Несложно проверить, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, вычисляются через производные[1]:

$$\zeta = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{\vartriangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \vartriangle z) - f(z_0)}{\vartriangle z}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

Мы заключаем, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, когда эти функции удовлетворяют дифференциальным *уравнениям Коши–Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

7.2. Комплексификация. С произвольным вещественным n-мерным пространством V можно канонически связать комплексное векторное пространство, которое обозначается $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$ и называется *комплексификацией* пространства V. Как векторное пространство над $\mathbb{R}$, пространство $V_{\mathbb{C}}$ представляет собой прямую сумму двух экземпляров пространства V (в частности, $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} V$)

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$$

причём векторы первого слагаемого обозначаются $1 \cdot v$, или просто v, а векторы второго слагаемого обозначаются $i \cdot v$, или iv (таким образом, равенство $v_1 + iv_2 = w_1 + iw_2$ по определению означает пару равенств $v_1 = w_1$ и $v_2 = w_2$). Сложение векторов и их умножение на вещественные числа задаётся покомпонентно, а умножение на комплексные числа определяется формулой:

$$(x + iy) \cdot (v_1 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (xv_1 - yv_2) + i(yv_1 + xv_2) \in V \oplus iV ,$$

где $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$.

Упражнение 7.1. Проверьте, что такое умножение действительно наделяет $V_{\mathbb{C}}$ структурой векторного пространства над полем $\mathbb{C}$.

Сравнение разложений (7-3) и (7-2) показывает, что каждый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V над $\mathbb{R}$ является одновременно базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ (в частности, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$).

[1] напомним, что $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{u(x_0 + \vartriangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\vartriangle x}$ и т. п.

7.3. Комплексное сопряжение и вещественная структура. На пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеется вещественно линейный автоморфизм

$$\sigma \,:\, V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{w=v_1+iv_2\,\mapsto\,\overline{w}=v_1-iv_2} V_{\mathbb{C}} \qquad (\text{где } v_1, v_2 \in V)\ ,$$

который называется *комплексным сопряжением*. Он удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, а вещественные подпространства V и iV являются его собственными подпространствами с собственными значениями $+1$ и -1 соответственно. Отметим, что по отношению к умножению на комплексные числа σ не линеен, а *антилинеен*, т. е. удовлетворяет соотношению

$$\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)\ , \qquad \forall\, w \in V_{\mathbb{C}}\ ,\quad \forall\, z \in \mathbb{C}\ .$$

Наоборот, всякое n-мерное комплексное векторное пространство W, оснащённое вещественно линейным комплексно антилинейным оператором $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sigma} W_{\mathbb{R}}$, таким что[2] $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$, канонически отождествляется с комплексификацией

$$W = \mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$$

собственного вещественного подпространства $V \subset W_{\mathbb{R}}$ оператора σ, отвечающего собственному значению $+1$. Действительно, поскольку σ аннулируется многочленом $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$, всё вещественное пространство $W_{\mathbb{R}}$ распадётся в прямую сумму собственных подпространств

$$\begin{gathered} W_{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_-\ , \quad \text{где} \\ V_+ = \ker(\sigma - \mathrm{Id}) = \mathrm{im}\,(\sigma + \mathrm{Id})\ , \quad V_- = \ker(\sigma + \mathrm{Id}) = \mathrm{im}\,(\sigma - \mathrm{Id})\ . \end{gathered}$$

Упражнение 7.2. Убедитесь в этом.

Из комплексной антилинейности оператора σ вытекает, что умножения на i и на $-i$ являются взаимно обратными изоморфизмами между собственными подпространствами $V_{\pm}$, поскольку

$$\begin{gathered} v_+ \in V_+ \;\Rightarrow\; \sigma(v_+) = v_+ \;\Rightarrow\; \sigma(iv_+) = -i\sigma(v_+) = -iv_+ \;\Rightarrow\; iv_+ \in V_- \\ v_- \in V_- \;\Rightarrow\; \sigma(v_-) = -v_- \;\Rightarrow\; \sigma(-iv_-) = i\sigma(v_-) = -iv_- \;\Rightarrow\; -iv_- \in V_+\ . \end{gathered}$$

Таким образом, мы получаем над $\mathbb{R}$ каноническое разложение

$$W_{\mathbb{R}} = V \oplus iV\ , \quad \text{где} \quad V \overset{\text{def}}{=} V_+\ , \quad iV \overset{\text{def}}{=} V_-\ .$$

Подчеркнём, что на абстрактном векторном пространстве W над полем $\mathbb{C}$ есть много разных вещественных структур, и никакого естественного предпочтения между ними *a priori* нет.

7.4. Комплексификация линейного оператора. Всякий вещественно линейный оператор $V' \xrightarrow{F} V''$ между вещественными векторными пространствами можно продолжить по линейности до комплексно линейного оператора

$$V'_{\mathbb{C}} \xrightarrow{F_{\mathbb{C}}} V''_{\mathbb{C}}\ ,$$

действующего между комплексифицированными пространствами по правилу

$$F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) \overset{\text{def}}{=} F(v_1) + iF(v_2)\ ,$$

Упражнение 7.3. Убедитесь, что $F_{\mathbb{C}}(zw) = zF_{\mathbb{C}}(w) \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$ и $\forall\, w \in V'_{\mathbb{C}}$, и что в вещественном базисе $\{e_i\}$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ оператор $F_{\mathbb{C}}$ имеет ту же матрицу, что и исходный вещественный оператор F над $\mathbb{R}$.

[2]всякий такой оператор называется *вещественной структурой* или *оператором комплексного сопряжения*

Поскольку поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, для любого вещественного оператора $V \xrightarrow{F} V$ комплексифицированный оператор $F_{\mathbb{C}}$ всегда имеет собственный вектор в пространстве $V_{\mathbb{C}}$. Условие, что комплексный вектор $w = v_1 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с комплексным собственным значением

$$\lambda = a + ib = \varrho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

означает, что $F(v_1) + iF(v_2) = F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2)$. Таким образом, вещественная линейная оболочка векторов v_1, v_2 в V является инвариантным подпространством для F, и действие F на этом подпространстве в базисе $\{v_1, v_2\}$ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \varrho \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Поскольку характеристический многочлен оператора $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ такой же, как и у оператора F, он имеет вещественные коэффициенты, а его комплексные невещественные корни разбиваются на пары сопряжённых. Предыдущее описание показывает, что вектор $w = v_1 + iv_2$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ тогда и только тогда, когда сопряжённый вектор $\overline{w} = v_1 - iv_2$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжённым собственным значением $\overline{\lambda}$. При этом оба этих вектора будут соответствовать одному и тому же вещественному двумерному инвариантному подпространству $U = \mathbb{R}\cdot v_1 \oplus \mathbb{R}\cdot v_2 \subset V$, и комплексификация этого двумерного пространства будет совпадать с комплексной линейной оболочкой собственных векторов $U_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cdot w \oplus \mathbb{C}\cdot \overline{w} \subset V_{\mathbb{C}}$. Очевидно также, что всякое собственное подпространство оператора $F_{\mathbb{C}}$, отвечающее вещественному собственному значению, является комплексификацией вещественного собственного пространства оператора F той же размерности и с тем же собственным значением.

7.4.1. СЛЕДСТВИЕ. *Всякий вещественно линейный оператор на вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.* □

7.4.2. Пример: изометрии евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Если оператор $\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$ сохраняет евклидово скалярное произведение, то ортогональное дополнение к каждому инвариантному подпространству также является инвариантным подпространством. По предыдущему следствию, $\mathbb{R}^n$ распадётся в прямую ортогональную сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств оператора F. Поскольку F сохраняет длину, его действие на одномерных инвариантных подпространствах заключается в умножении на ± 1, а на двумерных инвариантных подпространствах является чистым поворотом (без растяжения). Мы получаем, что любая изометрия евклидова пространства в подходящем *ортонормальном* базисе будет задаваться блочной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \boxed{\Pi(\varphi_1)} & & & & & & & \\ & \boxed{\Pi(\varphi_2)} & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \boxed{\Pi(\varphi_k)} & & & & \\ & & & & \pm 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

в которой 2×2–блоки $\Pi(\varphi_\nu)$ задают повороты, а наличие -1 равносильно тому, что оператор F меняет ориентацию (т.е. $\det F = -1$). В частности, любая *собственная* (т.е. сохраняющая ориентацию) изометрия вещественного трёхмерного пространства является поворотом вокруг некоторой прямой.

7.5. Комплексификация билинейных форм. Всякую вещественно билинейную форму

$$V \times V \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}$$

(на вещественном векторном пространстве V) можно продолжить по $\mathbb{C}$-линейности до комплексно билинейной формы

$$V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\beta_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}\,,$$

значения которой на комплексифицированных векторах вычисляются по правилу

$$\beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iu_2, v_1 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1,v_1) - \beta(u_2,v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1,v_2) + \beta(u_2,v_1)\big)\,.$$

Матрица Грама такой формы $\beta_{\mathbb{C}}$ в любом вещественном базисе пространства $V_{\mathbb{C}}$ будет совпадать с матрицей Грама формы β в том же базисе. Если форма β была (косо) симметричной, то такой же будет и её комплексификация $\beta_{\mathbb{C}}$. Отметим однако, что специфические вещественные инварианты формы (такие как сигнатура симметрической формы) при этом утрачиваются: например, все невырожденные симметричные $\mathbb{R}$-билинейные формы (произвольной сигнатуры) после комплексификации становятся эквивалентны друг другу, в частности, евклидово скалярное произведение после комплексификации превращается в обычную невырожденную комплексную квадрику, заметаемую изотропными подпространствами половинной размерности.

7.6. Эрмитово продолжение билинейных форм с V на $V_{\mathbb{C}}$. Чтобы оставить возможность заниматься метрической геометрией в пространстве $V_{\mathbb{C}}$, вещественно билинейную форму, задающую скалярное произведение на V, продолжают на $V_{\mathbb{C}}$ не комплексно билинейно, а линейно по первому аргументу и антилинейно по второму[3]

$$\beta_{\text{he}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1,u_2) + \beta(v_1,v_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1,v_2) - \beta(v_1,u_2)\big)\,. \tag{7-6}$$

Форма β_{he} называется *эрмитовым продолжением* вещественно билинейной формы β с V на $V_{\mathbb{C}}$. Отметим, что значения квадратичной формы ассоциированной с эрмитовым продолжением симметричной формы g автоматически получаются вещественными:

$$g_{\text{he}}(u+iv, u+iv) = g(u,u) + g(v,v) \in \mathbb{R} \quad \forall\, (u+iv) \in V_{\mathbb{C}}\,,$$

а значения квадратичной формы, ассоциированной с эрмитовым продолжением кососимметричной формы ω, будут чисто мнимыми и, вообще говоря, ненулевыми

$$\omega_{\text{he}}(u+iv, u+iv) = 2i\,\omega(u,v) \in i\cdot\mathbb{R} \quad \forall\, (u+iv) \in V_{\mathbb{C}}\,.$$

7.6.1. Пример: эрмитово продолжение евклидовой структуры на вещественном пространстве V представляет собой вещественно билинейное скалярное произведение на комплексифицированный пространстве $V_{\mathbb{C}}$ со свойствами:

$$\begin{gathered}(w_1,w_2) = \overline{(w_2,w_1)}\,, \quad (w,w)\in\mathbb{R}\ \ \forall\, w\in W\ \ , \quad (w,w) > 0\ \forall\, w \neq 0\,,\\ (z\,w_1, w_2) = z\,(w_1,w_2) = (w_1, \overline{z}\,w_2)\ \ \forall\, z\in\mathbb{C}\ \ .\end{gathered}$$

Например, комплексификацией координатного пространства $V = \mathbb{R}^n$ является координатное пространство $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$, и эрмитовым продолжением евклидовой структуры $(x,y) = \sum x^\nu y^\nu$ является эрмитова структура $(w,z) = \sum w^\nu \overline{z}^\nu$.

Аналогично, комплексификацией пространства вещественных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с евклидовым скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{7-7}$$

является пространство непрерывных *комплекснозначных* функций на $[a,b]$, и эрмитово продолжение евклидовой структуры (7-7) задаётся формулой[4]

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

[3] впрочем, в некоторых кругах употребительна зеркальная конструкция: форма продолжается линейно по по второму аргументу и антилинейно по первому, что меняет знак во втором слагаемом формулы (7-6)

[4] где под интегралом от комплекснозначной функции $f(t) = u(t) + iv(t)$, по определению, понимается коиплексное число $\int u\,dt + i\int v\,dt$