§6. Ортогональная геометрия над произвольным полем.

Всюду в этой этой лекции мы предполагаем $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$.

6.1. Билинейные формы. Билинейной формой на векторном пространстве V над $\Bbbk$ называется отображение
$$V \times V \xrightarrow{\beta} \Bbbk$$
линейное по каждому из двух аргументов, т. е. удовлетворяющее стандартному правилу раскрытия скобок:
$$\beta(\,\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\,,\,\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2\,) = \\ = \lambda_1\mu_1 \cdot \beta(v_1, w_1) + \lambda_1\mu_2 \cdot \beta(v_1, w_2) + \lambda_2\mu_1 \cdot \beta(v_2, w_1) + \lambda_2\mu_2 \cdot \beta(v_2, w_2) \quad (6\text{-}1)$$
Пространства с билинейными формами рассматривают вместе с линейными отображениями, переводящими одну форму в другую. Точнее, если на векторных пространствах V_1, V_2 заданы билинейные формы β_1, β_2, то линейное отображение $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ называется *изометрическим*, если $\forall\, v, w \in V_1$ выполнено равенство
$$\beta_1(v, w) = \beta_2(f(v), f(w))\ .$$

Матрица значений билинейной формы на всевозможных парах векторов из некоторого набора $\{v_\nu\}$ называется *матрицей Грама* формы β на наборе $\{v_\nu\}$ и обозначается
$$B_{(v_1, v_2, \dots, v_m)} = (\beta(v_\mu, v_\nu))\ .$$
Если один набор векторов получается из другого линейным преобразованием:
$$(v_1', v_2', \dots, v_k') = (v_1, v_2, \dots, v_m) \cdot C\ ,$$
то их матрицы Грама связаны уже известным нам преобразованием $B' = C^t \cdot B \cdot C$.

Каждая билинейная форма определяет два линейных отображения
$$\begin{aligned} L_\beta\ :\ V &\xrightarrow{v \mapsto \beta(v,*)} V^* \\ R_\beta\ :\ V &\xrightarrow{v \mapsto \beta(*,v)} V^* \end{aligned} \qquad (6\text{-}2)$$
называемые *левой* и *правой корреляциями* билинейной формы β.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что матрицы операторов L_β и R_β, записанные в двойственных базисах $\{e_i\} \subset V$ и $\{e_i^*\} \subset V^*$, совпадают, соответственно, с $B_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}$ и $B^t_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}$, а также что $L_\beta^* = R_\beta$ и $R_\beta^* = L_\beta$, где $V^{**} = V \xrightarrow{L_\beta^*} V^*$ и $V^{**} = V \xrightarrow{R_\beta^*} V^*$ суть двойственные операторы (действующие между пространствами, двойственными к (6-2), в противоположном направлении).

В действительности, задание любого из этих двух отображений равносильно заданию билинейной формы. Например, любое линейное отображение $V \xrightarrow{L} V^*$ можно воспринимать как левую корреляцию билинейной формы $\beta(v, w) \overset{\text{def}}{=} \langle\, L(v)\,,\,w\,\rangle$.

Билинейная форма называется *невырожденной*, если отвечающая ей корреляция является изоморфизмом[1], что равносильно невырожденности матрицы Грама произвольного базиса пространства V, а также существованию для любого $v \neq 0$ такого w, что $\beta(v, w) \neq 0$.

Если форма вырождена, то обе корреляции имеют ненулевые ядра
$$\begin{aligned} \ker L_\beta &= \{u \in V \mid \beta(u, v) = 0 \ \ \forall\, v \in V\,\} \\ \ker R_\beta &= \{u \in V \mid \beta(v, u) = 0 \ \ \forall\, v \in V\,\}\ , \end{aligned}$$

[1] поскольку левая и правая корреляции двойственны друг другу, неважно какую из них использовать для проверки невырожденности

называемые, соответственно, *левым* и *правым* ядром билинейной формы β. Вообще говоря, это *разные* подпространства в V, но имеющие одинаковую размерность, поскольку матрицы у L_β и R_β транспонированы друг другу.

6.1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено. Тогда $V = {}^\perp U \oplus U = U \oplus U^\perp$, где*

$$\begin{aligned} {}^\perp U &= \{v \in V \mid \beta(v,u) = 0 \ \ \forall\, u \in U\} \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \beta(u,v) = 0 \ \ \forall\, u \in U\}\,, \end{aligned}$$

причём левый и правый ортогональные проекторы $\pi', \pi'' : V \twoheadrightarrow U$, проектирующие V на U вдоль ${}^\perp U$ и $U^\perp$ соответственно, однозначно определяются как линейные операторы, удовлетворяющие для любых $u \in U$, $v \in V$ соотношениям

$$\beta(v,u) = \beta(\pi'(v), u) \qquad \text{и} \qquad \beta(u,v) = \beta(u, \pi''(v)) \tag{6-3}$$

Доказательство. Рассуждаем как в n° 5.6.2: мы имеем два линейных отображения

$$\begin{aligned} \psi &: V \xrightarrow{v \mapsto \beta(v,*)} U^* \\ \varphi &: U \xrightarrow[\sim]{u \mapsto \beta(u,*)} U^* \end{aligned}$$

причём второе из них является изоморфизмом вследствие невырожденности ограничения формы β на U. Первое из равенств (6-3) означает, что $\pi'(v) = \varphi^{-1}\psi$. Таким образом, оператор $V \xrightarrow{\pi'} U$, удовлетворяющий первому из равенств (6-3) существует и единственен. То же равенство (6-3) показывает, что $v - \pi'(v) \in {}^\perp U$, а значит всякий вектор $v \in V$ раскладывается в сумму $v = (v - \pi'(v)) + \pi'(v) \in {}^\perp U + U$. Невырожденнность ограничения β на U влечёт ${}^\perp U \cap U = 0$, т. е. сумма $V = {}^\perp U \oplus U$ прямая. Рассуждение про π'' и разложение $V = U \oplus U^\perp$ симметрично. □

6.2. Условия симметрии. Билинейные формы β, удовлетворяющие $\forall\, v, w \in V$ условию

$$\beta(v,w) = \beta(w,v) \qquad \text{или} \qquad \beta(v,w) = -\beta(w,v)$$

называются, соответственно, *симметричными* или *кососимметричными*. При $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ условие кососимметричности равносильно условию $\beta(v,v) = 0 \ \ \forall\, v \in V$. Ясно что (косо) симметричность формы равносильна (косо) симметричности её матрицы Грама в любом базисе.

Произвольная билинейная форма β однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм:

$$\begin{gathered} \beta(v,w) = \beta_+(v,w) + \beta_-(v,w)\,, \quad \text{где} \\ \beta_+(v,w) = (\beta(v,w) + \beta(w,v))/2\,, \quad \beta_-(v,w) = (\beta(v,w) - \beta(w,v))/2\,. \end{gathered}$$

Таким образом, векторное пространство всех билинейных форм на $V \times V$ является прямой суммой подпространств симметричных и кососимметричных форм.

Упражнение 6.2. Вычислите размерности всех трёх этих пространств, если $\dim V = n$.

Левое и правое ядро любой (косо) симметричной формы β, очевидно, совпадают друг с другом. Соответствующее подпространство $\ker \beta \overset{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \beta(w,v) = \pm\beta(w,v) = 0 \ \ \forall\, v \in V\}$ называются просто *ядром* (косо) симметричной формы β.

6.2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $V = \ker \beta \oplus U$ для (косо) симметричной формы β на V. Тогда ограничение формы β на подпространство U невырождено.*

Доказательство. Рассуждаем как и в n° 2.2.1. Если $w \in U$ лежит в ядре $\beta|_U$, т. е. удовлетворяет $\forall\, u \in U$ соотношению $\beta(w,u) = 0$, то записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$ с $e \in \ker \beta$, $u \in U$ мы получим $\beta(w,v) = \beta(w,e) + \beta(w,u) = 0$, т. е. $w \in U \cap \ker \beta = 0$. □

Упражнение 6.3. Покажите, что без предположения (косо) симметричности предложение перестаёт быть верным, точнее, проверьте, что если $V = \ker L_\beta \oplus U = \ker R_\beta \oplus W$, то ограничение левой корреляции $V \xrightarrow{L_\beta} V^*$ на подпространство U устанавливает изоморфизм U с W^*, но не с U^*.

6.3. Изотропные и анизотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β, если $\beta(u_1, u_2) = 0\ \forall\, u_1, u_2 \in U$, т. е. когда ограничение формы на U тождественно нулевое. Изотропные подпространства симметрической формы — это в точности подпространства, лежащие на соответствующей проективной квадрике.

Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным* для симметричной формы β, если

$$\beta(u,u) \neq 0 \quad \forall v \neq 0\ .$$

Например, евклидово скалярное произведение является анизотропной формой на всём пространстве. Анизотропные квадратичные формы задают пустые проективные квадрики.

6.3.1. Пример: гиперболическое пространство H_{2n} определяется как прямая сумма $V^* \oplus V$, где $\dim V = n$, с *симметричной* билинейной формой

$$h\big(\,(\xi_1, v_1)\,,\,(\xi_2, v_2)\,\big) = \langle\, \xi_1\,,\, v_2\,\rangle + \langle\, \xi_2\,,\, v_1\,\rangle\ . \tag{6-4}$$

Иначе говоря, форма h ограничивается в тождественно нулевые формы на подпространствах V и V^*, а на любой паре паре вектор-ковектор она действует как свёртка[2] $h(\xi, v) = h(v, \xi) = \langle\, \xi\,,\, v\,\rangle$. Если выбрать в H_{2n} базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n, e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \tag{6-5}$$

образованный векторами какого-либо базиса V и двойственного ему базиса V^*, то матрица Грама формы h в таком базисе будет иметь блочный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

в котором 0 — нулевая, а E — единичная $n \times n$ – матрицы. В частности, форма h невырождена.

Упражнение 6.4. Каков диагональный вид формы на гиперболическом пространстве H_{2m}?

Упражнение 6.5. Докажите, что следующие условия на подпространство V с невырожденной симметричной билинейной формой попарно эквивалентны:

а) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству;

б) V является прямой суммой двух изотропных подпространств;

в) $\dim V$ — чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

6.3.2. ТЕОРЕМА. *Любое пространство V с невырожденной симметричной формой g раскладывается в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств.*

Доказательство. Если в V нет изотропных векторов, уже само V является анизотропным подпространством. Если в V есть ненулевой изотропный e_1, то ввиду невырожденности формы найдётся ещё один вектор $w \in V$, такой что $g(e_1, w) = a \neq 0$. Полагая $u = w - \frac{1}{2a}\, g(w,w)\cdot e_1$, будем иметь $g(e_1, u) = g(e_1, w) = a$ и $g(u,u) == 0$. Поэтому матрица Грама ограничения α на двумерное подпространство $U \subset V$, порождённое векторами e_1 и $e_2 = u/a$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Это ограничение гиперболично и, в частности, невырождено. По предложению n° 6.1.1 $V = U \oplus U^\perp$. Ограничение g на $U^\perp$ также должно быть невырождено, и мы можем воспользоваться индукцией по размерности. □

Упражнение 6.6. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $H_{2m} \oplus H_{2k}$ изометрически изоморфна $H_{2(m+k)}$.

Упражнение 6.7. Докажите, что всякое m-мерное изотропное подпространство в пространстве V с невырожденной симметричной формой содержится в некотором гиперболическом подпространстве $H_{2m} \subset V$.

[2]здесь и далее мы будем использовать симметричное обозначение $\langle\, \xi\,,\, v\,\rangle$ для значения ковектора $\xi \in V^*$ на векторе $v \in V$

6.4. Изометрии невырожденной симметричной формы. Рассмотрим векторное пространство V с невырожденной симметричной билинейной формой g. Изометрические операторы

$$V \xrightarrow{f} V$$

в произвольном базисе пространства V записываются матрицами F, удовлетворяющими соотношению

$$F^t \cdot G \cdot F = G \ ,$$

где F — матрица Грама рассматриваемого базиса. В частности, если G невырождена, все изометрические операторы обратимы и имеют

$$F^{-1} = G^{-1} F^t G \ .$$

Таким образом все изометрические операторы для данной невырожденной симметричной формы g образуют *группу*, которая называется *ортогональной группой* формы g и обозначается O_g. Если зафиксировать в V ортонормальный базис, то группа O_g отождествится с *группой ортогональных матриц* размера $n \times n$, где $n = \dim V$

$$\mathrm{O}_n(\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \{ g \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \mid g^{-1} = g^t \} \ .$$

Её подгруппа $\mathrm{SO}_n(\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathrm{O}_n(\Bbbk) \mid \ \det f = 1 \}$ называется *специальной ортогональной группой*.

6.4.1. Пример: отражения. Для любого анизотропного вектора $e \in V$ преобразование $V \xrightarrow{\sigma_e} V$, действующее по формуле

$$\sigma_e(v) = v - 2 \, \frac{g(e,v)}{g(e,e)} \cdot e \ ,$$

называется *отражением* в гиперплоскости $e^{\perp}$. В самом деле, поскольку e анизотропен, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $V = \Bbbk \cdot e \oplus e^{\perp}$, где $e^{\perp} = \{ v \in V \mid g(e,v) = 0 \}$, и σ_v тождественно действует на $e^{\perp}$ и переводит e в $-e$. В частности, $\sigma_e \in \mathrm{O}_g$ и $\sigma_e^2 = 1$.

Упражнение 6.8. Удостоверьтесь, что для любой изометрии $V \xrightarrow{f} V$ и любого анизотропного $e \in V$ выполняется соотношение $\sigma_{f(v)} = f \circ \sigma_v \circ f^{-1}$.

Важным свойством ортогональной группы является то, что она *порождается отражениями*.

6.4.2. ЛЕММА. *В пространстве с невырожденной симметричной формой для любых двух различных анизотропных векторов u, v с одинаковым скалярным квадратом $g(u,u) = g(v,v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v либо в $-v$.*

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v неколлинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей натянутого на них ромба тоже должна быть анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны между собой

$$g(u+v, u-v) = g(u,u) - g(v,v) = 0$$

и порождают то же двумерное пространство, что и u, v. Но отражение относительно $(u-v)^{\perp}$ переводит u в v, а отражение относительно $(u+v)^{\perp}$ переводит u в $-v$. □

Упражнение 6.9. Убедитесь в этом.

Упражнение 6.10. Покажите, что если пространство V анизотропно, то всегда существует отражение, переводящее u в точности в v.

6.4.3. ТЕОРЕМА. *Всякая изометрия n-мерного пространства с невырожденной симметричной формой является композицией $\leqslant 2n$ отражений.*

Доказательство. Индукция по n. Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Для произвольной изометрии $V \xrightarrow{f} V$ n-мерного пространства рассмотрим произвольный анизотропный вектор v и отражение σ, переводящее v либо в $f(v)$, либо в

$-f(v)$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n-1)$-мерную гиперплоскость $v^\perp$. По индукции, действие σf на $v^\perp$ является композицией $\leqslant 2(n-1)$ отражений. Но тогда $f = \sigma\sigma f$ является композицией $\leqslant (2n-1)$ отражений и, может быть, ещё одного отражения $\sigma_{f(v)}$. □

Упражнение 6.11. Докажите, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией $\leqslant n$ отражений.

6.4.4. ТЕОРЕМА (ЛЕММА ВИТТА). *Пусть на пространствах U, V, W заданы некоторые невырожденные симметричные билинейные формамы. Если существует изометрический изоморфизм прямой ортогональной суммы $U \oplus V$ с прямой ортогональной суммой $U \oplus W$, то существует изометрический изоморфизм V с W.*

Доказательство. Индукция по $\dim U$. Если $U = 0$, то доказывать нечего. Если $U = \Bbbk \cdot u$ одномерно, то u автоматически анизотропен. Для данного изометрического изоморфизма

$$\Bbbk \cdot u \oplus V \xrightarrow{f} \Bbbk \cdot u \oplus W$$

рассмотрим отражение σ второго пространства, переводящее $f(u)$ в $\pm u$. Тогда изометрия σf переводит $\Bbbk \cdot u$ в $\Bbbk \cdot u$, а значит, индуцирует искомую изометрию ортогональных дополнений к u $V \xrightarrow{\sigma f} W$.

Если $\dim U > 1$, выберем в U произвольный анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональное разложение $U = \Bbbk \cdot u \oplus u^\perp$. Применяя предположение индукции к $U = \Bbbk \cdot u$ получим изометрический изоморфизм $u^\perp \oplus V$ с $u^\perp \oplus W$. Второй раз применяя индуктивное предположение с $U = u^\perp$, получаем искомую изометрию V с W. □

6.4.5. СЛЕДСТВИЕ. *Если пространства V и W с невырожденными формами изометрически изоморфны, то всякое изометрическое вложение в W произвольного подпространства $U \subset V$, на которое форма с V ограничивается невырожденно, можно продолжить до изометрии всего V на W.*

Доказательство. По теореме Витта существует изометрический изоморфизм между ортогональным дополнением до U в V и ортогональным дополнением до образа U в W. Этот изоморфизм и продолжит заданное вложение. □

6.4.6. СЛЕДСТВИЕ. *Всякое гиперболическое подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой может быть переведено в любое другое гиперболическое подпространство той же размерности подходящей изометрией объемлющего пространства.* □

6.4.7. СЛЕДСТВИЕ. *Любое изотропное подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой переводится в любое другое изотропное подпространство той же размерности при помощи подходящей изометрии объемлющего пространства.* □

6.4.8. СЛЕДСТВИЕ. *Линейные подпространства одинаковой размерности, лежащие на произвольной проективной квадрике (над любым полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$) транзитивно переводятся друг в друга линейными проективными преобразованиями объемлющего пространства, сохраняющими эту квадрику.* □

6.4.9. СЛЕДСТВИЕ. *Разложение пространства с невырожденной симметричной билинейной формой в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств из n° 6.3.2 единственно с точностью до изометрического изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $H_{2m} \oplus A = H_{2k} \oplus A'$ — два разложения из n° 6.3.2 с $m \leqslant k$. По теореме Витта существовует изометрический изоморфизм A с $H_{2(k-m)} \oplus A'$, что из-за анизотропности A возможно лишь при $H_{2(l-m)} = 0$, т. е. при $m = l$. Тогда мы получаем изометрический изоморфизм A с A'. □

6.4.10. Пример: вещественные квадратичные формы. По теореме Лагранжа, всякая вещественная квадратичная форма на n-мерном вещественном пространстве линейной заменой координат преобразуется к виду

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2,$$

Число $\operatorname{rk}(q) = (p+m)$ называется *рангом*, а число $i(q) = (p-m)$ называется *индексом* квадратичной формы q. Согласно предыдущим следствиям, ранг и индекс не зависят от способа приведения формы к диагональному виду и определяют форму однозначно с точностью до изометрического изоморфизма. В самом деле, допустим для определённости, что $p \geqslant m$, и сделаем замену

$$x_i^2 - x_{p+i}^2 = (x_i + x_{p+i})(x_i - x_{p+i}) = y_i y_{p+i}$$
$$x_\nu = y_\nu \quad \text{при } \nu = (m+1), (m+2), \dots, p \text{ и } \nu > (p+m)\,.$$

Получим разложение q в сумму гиперболической и анизотропной форм $q(y) = h_{2m}(y) + g_{p-m}(y)$, в котором

$$h_{2m}(y) = y_1 y_{p+1} + \ \cdots \ + y_m y_{p+m}\ , \quad g_{p-m}(y) = y_{m+1}^2 + \cdots + y_p^2\ .$$

Таким образом, $2\min(p,q)$ равен размерности гиперболической составляющей формы q, абсолютная величина индекса $|i(q)|$ равна размерности анизотропной составляющей формы q, и знак у i положителен или отрицателен в соответствии с тем положительно или отрицательно определена анизотропная составляющая формы q.

Упражнение 6.12. Покажите, что пересечение неособой вещественной проективной квадрики $Q \subset \mathbb{RP}_n$ с касательным пространством T_pQ в произвольной точке $p \in Q$ является конусом с вершиной p над неособой квадрикой $Q' \subset \mathbb{RP}_{n-2}$ в дополнительной к p $(n-2)$-мерной гиперплоскости в T_pQ и имеющей *тот же индекс*, что и исходная квадрика Q. Выведите отсюда описание линейных подпространств, лежащих на неособой проективной квадрике заданного индекса в $\mathbb{RP}_n$.

Числа p и m положительных и отрицательных квадратов диагонального представления формы q называются положительным и отрицательным *индексами инерции* формы q, а пара (p,m) называется *сигнатурой* формы q.

Упражнение 6.13. Докажите, что положительный индекс инерции равен наибольшей из размерностей таких подпространств, на которые форма ограничевается в положительно определённую форму, а отрицательный индекс инерции равен наибольшей из размерностей таких подпространств, на которые форма ограничевается в отрицательно определённую форму.

Обычно сигнатуру невырожденной симметричной формы бывает можно определить без явного построения ортогонального базиса. Для этого рассматривают *главные угловые миноры*

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\ , \quad \text{где} \quad n = \dim V\ , \tag{6-6}$$

любой её матрицы Грама (по определению, $\Delta_0 = 1$, а Δ_k — это минор, стоящий в первых k строках и первых k столбцах). Пусть, к примеру, для некоей симметричной билинейной формы g на $\mathbb{R}^4$ последовательноть (6-6) имеет

$$\Delta_1 < 0\ , \quad \Delta_2 = 0\ , \quad \Delta_3 < 0\ , \quad \Delta_4 > 0\ .$$

Поскольку ограничение g на линейную оболочку первых двух базисных векторов вырождено, она содержит изотропный вектор, а значит, линейная оболочка первых трёх базисных базисных векторов содержит гиперболическую плоскость, и диагональный вид ограничения g на это трёхмерное пространство либо $(1,-1,1)$, либо $(1,-1,-1)$. Поскольку $\Delta_3 < 0$ второй случай невозможен, а т. к. $\Delta_4 > 0$, мы заключаем, что на всём пространстве g имеет сигнатуру $(2,2)$.

Упражнение 6.14. Докажите, что если все элементы последовательности (6-6) отличны от нуля, то отрицательный индекс инерции n равен числу перемен знака при последовательном прочтении (6-6) слева направо (это правило известно как *критерий Сильвестра*)

6.4.11. Пример: квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. В силу принципа Дирихле, всякая невырожденная квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a\,x_1^2 + b\,x_2^2$$

над полем $\mathbb{F}_p$ принимает все значения из $\mathbb{F}_p$. Действительно, при ненулевых a, b и произвольном c оба множества $\{a\,x_1^2\}$ и $\{c - b\,x_2^2\}$, где x_1, x_2 независимо пробегают $\mathbb{F}_p$, состоят из $(p+1)/2$ элементов (ровно столько квадратов имеется в $\mathbb{F}_p$), и потому пересекаются, т. е. уравнение $a\,x_1^2 + b\,x_2^2 = c$ разрешимо.

Из этого вытекает, что любая симметричная форма размерности $\geqslant 3$ обладает ненулевым изотропным вектором, а любая невырожденная симметричная форма g в размерности $\geqslant 2$ имеет вектор e с квадратом $g(e,e) = 1$. Таким образом, анизотропные формы исчерпываются одномерными формами вида x^2 и $\varepsilon\,x^2$ и двумерными формами $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^2 + \varepsilon\,x_2^2$, где $\varepsilon \in \mathbb{F}_p$ произвольным образом зафиксированный элемент, не являющийся квадратом.

Упражнение 6.15. Проверьте, что при $p \equiv 1 \pmod 4$ форма $x_1^2 + x_2^2$ гиперболична, а форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ анизотропна, а при $p \equiv -1 \pmod 4$, наоборот, форма $x_1^2 + x_2^2$ анизотропна, а форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ гиперболична.

Упражнение 6.16. Проверьте, что любая невырожденная симметричная форма над $\mathbb{F}_p$ приводится либо к виду $\sum x_i^2$ либо к виду $\varepsilon x_1 + \sum\limits_{i \geqslant 2} x_i^2$.

6.5. Невырожденные кососимметричные формы. Кососимметрическим аналогом гиперболического пространства является *симплектическое пространство* Ω_{2n}, которое тоже представляет собой прямую сумму $V^* \oplus V$ $(\dim V = n)$, но с кососимметричной билинейной формой

$$\omega\big((\xi_1, v_1) \, , \, (\xi_2, v_2) \big) = \big\langle \, \xi_1 \, , \, v_2 \, \big\rangle - \big\langle \, \xi_2 \, , \, v_1 \, \big\rangle \, . \tag{6-7}$$

В специальном базисе (6-4), образованном парой двойственных базисов в V^* и V, матрица Грама формы ω имеет блочный вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \, . \tag{6-8}$$

В частности, мы видим, что ω невырождена. Матрица J называется *симплектической единицей* и удовлетворяет соотношениям $J^2 = -E$, $\det J = 1$. Мир кососимметрических форм намного беднее, чем мир квадратичных форм.

6.5.1. ТЕОРЕМА. *Любое пространство V с невырожденной кососимметричной формой ω изометрически изоморфно симплектическому пространству (в частности, $\dim V$ чётна).*

Доказательство. В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Поскольку ω невырождена, существует $w \in V$, такой что $\omega(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = w/a$. Матрица Грама ограничения ω на двумерное подпространство $U \subset V$, порождённое векторами e_1, e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Поскольку это ограничение невырождено, $V = U \oplus U^\perp$ по предложению n° 6.1.1. Ограничение формы ω на $U^\perp$ также невырождено, и мы можем воспользоваться индукцией по размерности. □

Упражнение 6.17. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \oplus \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

Упражнение 6.18. Убедитесь непосредственно, что определитель кососимметричной квадратной матрицы нечётного размера равен нулю.

6.5.2. Симплектические базисы, лагранжевы подпространства и группа $\mathrm{Sp}_\omega(V)$. Базис, в котором невырожденная билинейная кососимметричная форма на пространстве V имеет матрицу Грама J, называется *симплектическим*. Изометрические линейные преобразования $V \xrightarrow{F} V$ (т. е. такие, что $\omega(u, v) = \omega(Fu, Fv)\ \forall\, u, v \in V$) обычно называются *симплектическими* и образуют группу $\mathrm{Sp}_\omega(V)$, называемую *симплектической группой* формы ω. В симплектическом базисе матрица симплектического оператора удовлетворяет условию $F^t \cdot J \cdot F = J$, и эта группа отождествляется с *группой симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \{ F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\Bbbk) \mid F^t \cdot J \cdot F = J \} \, .$$

Упражнение 6.19. Покажите, что имеется вложение $\mathrm{GL}_n(\Bbbk) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$, задаваемое правилом

$$F \mapsto \begin{pmatrix} {F^{-1}}^t & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

(описывающим действие $\mathrm{GL}(V)$ на $V^* \oplus V$ парой операторов $V \xrightarrow{F} V$ и $V^* \xrightarrow{{F^{-1}}^t} V^*$).

Упражнение 6.20. Докажите, что все $f \in \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ имеют определитель 1 и *возвратный* характеристический многочлен $\chi(t) = t^{2n}\chi(t^{-1})$.

Максимальные изотропные подпространства $L = L^{\perp}$ формы ω имеют размерность $n = \dim V/2$ и называются *лагранжевыми*. Следуя доказательству теоремы n° 6.5.1, произвольный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ любого лагранжева подпространства L можно дополнить до симплектического базиса в V векторами $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, такими что $\omega(e_i, e'_j) = \delta_{ij}$. Из этого вытекает, что $\mathrm{Sp}_{\omega}(V)$ транзитивно действует на лагранжевых подпространствах.

Упражнение 6.21. Покажите, что всякое изотропное подпространство U формы ω содержится в некотором лагранжевом подпространстве, а также в некотором подпространстве размерности $2\dim U$, на которое форма ω ограничивается невырождено.

6.5.3. ТЕОРЕМА. *Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметричная матрица размера $(2n)\times(2n)$, элементы которой a_{ij} с $i < j$ рассматриваются как независимые переменные. Существует единственный многочлен*[3] $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, *такой что* $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$ *и* $\mathrm{Pf}(J') = 1$, *где J' — блочно диагональная матрица, составленная из 2×2-блоков $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Явное выражение пфаффиана через матричные элементы задаётся формулой:*

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}= \\ =\{1,2,\dots,2n\}}} \mathrm{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \, \cdots \, a_{i_n j_n} \,, \tag{6-9}$$

в которой суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ в объединение n непересекающихся пар $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок которых не существенен, а sgn *означает знак соответствующей перестановки*[4].

Доказательство. Рассмотрим A как матрицу Грама кососимметричной формы на координатном векторном пространстве над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij}. Она, очевидно, невырождена, и в подходящем базисе её матрицей Грама будет матрица J', откуда $A = C^t \cdot J' \cdot C$ и $\det(A) = \det(C)^2$ для некоторой матрицы C, элементы которой суть отношения полиномов от a_{ij} с рациональными коэффициентами. С другой стороны, рассмотрим на том же пространстве грассманову квадратичную форму $\alpha = \sum\limits_{i \neq j} a_{ij} \cdot e_i \wedge e_j$. Поскольку все чётные произведения $e_i \wedge e_j$ попарно коммутируют друг с другом, n-тая степень $\alpha^n = \alpha\wedge\alpha\wedge\dots\wedge\alpha = n! \cdot \mathrm{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \, \cdots \, \wedge e_{2n}$, где $\mathrm{Pf}(A)$ задаётся формулой (6-9). Если теперь сделать линейную замену базиса $e = \xi \cdot C$, то $\alpha = (e\,A) \wedge e^t = (\xi\, CA) \wedge (C^t \xi^t) = (\xi\, A') \wedge \xi^t$ запишется новой матрицей $A' = CAC^t$, и n-тая внешняя степень приобретёт вид $\alpha^n = n! \cdot \mathrm{Pf}(A') \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \, \cdots \, \wedge \xi_{2n}$. Так как $e_1 \wedge e_2 \wedge \, \cdots \, \wedge e_{2n} = \det C \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \, \cdots \, \wedge \xi_{2n}$, мы получаем для $\mathrm{Pf}(A)$ закон преобразования

$$\mathrm{Pf}(A') = \mathrm{Pf}(CAC^t) = \mathrm{Pf}(A) \cdot \det C \,.$$

В частности, беря $A = CJ'C^t$, имеем $\mathrm{Pf}(A) = \det(C) \cdot \mathrm{Pf}(J) = \det C$ и $\det(A) = \det^2(C) = \mathrm{Pf}^2(A)$. Единственность такого многочлена вытекает из следующей задачи. □

Упражнение 6.22. Убедитесь, что если уравнение $F = X^2$ разрешимо относительно X в кольце целочисленных многочленов $\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]$, то это решение единственно с точностью до знака.

Упражнение 6.23. Напишите явные формулы для пфаффианов 2-го, 4-го и 6-го порядка.

Упражнение 6.24*. Фиксируем любое $n \in \mathbb{N}$ и любое чётное $m \leqslant n$. Покажите, что для кососимметричной матрицы A размера $n \times n$ и произвольной матрицы C из m строк и n столбцов выполняется полиномиальное тождество[5]

$$\mathrm{Pf}(CAC^t) = \sum_{\#I = m} \mathrm{Pf}(A_I) \cdot \det(C_I)$$

где суммирование производится по всем возрастающим наборам $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, C_I означает минор m-того порядка, стоящий в I-столбцах, а $A_I = \big(a_{i_\mu i_\nu}\big)_{i_\mu, i_\nu \in I}$ — квадратную $m\times m$-подматрицу, стоящую в пересечениях строк и столбцов с номерами из I.

[3] он называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы

[4] убедитесь, что правая часть не меняется ни при перестановках пар друг с другом, ни при перестановке элементов в каждой паре

[5] как и выше, мы воспринимаем его как тождество в кольце многочленов с целыми коэффициентами от независимых матричных элементов $a_{ij} = -a_{ji}$ и $c_{\alpha\beta}$