§5. Нормы и скалярные произведения на $\mathbb{R}^n$.

5.1. Метрики и нормы. Напомним, что *метрикой* на множестве X называется функция

$$X \times X \xrightarrow{\varrho} \mathbb{R} ,$$

обладающая $\forall\, x, y, z \in X$ свойствами

(1) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ (симметричность)
(2) $\varrho(x,y) \geqslant 0$ (положительность)
(3) $\varrho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (невырожденность)
(4) $\varrho(x,y) + \varrho(y,z) \geqslant \varrho(x,z)$ (неравенство треугольника)

Занимаясь аффинной геометрией вещественного аффинного пространства $X = \mathbb{R}^n$ естественно ограничиться только метриками, согласованными с аффинной структурой, т. е. инвариантными относительно параллельных переносов и однородными относительно растяжений. Это означает, что $\forall\, x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$ и $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$ выполняется дополнительное условие

(5) $\overrightarrow{xy} = \lambda \cdot \overrightarrow{wz} \Rightarrow \varrho(x,y) = |\lambda| \varrho wz$.

Иначе говоря, такая метрика на аффинном пространстве индуцирована функцией от одного аргумента на подлежащем векторном пространстве: $\varrho(x,y) = ||\overrightarrow{xy}||$. Функция

$$V \xrightarrow{v \mapsto ||v||} \mathbb{R}$$

на вещественном векторном пространстве V называется *нормой*, если она обладает $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$ и $\forall\, v, w \in V$ свойствами, эквивалентными перечисленным выше:

(1) $||v|| \geqslant 0$ (положительность)
(2) $||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$ (невырожденность)
(3) $||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v||$ (однородность)
(4) $||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$ (неравенство треугольника)

Упражнение 5.1. Проверьте, что выполнение $\forall\, v, w \in V$ неравенства треугольника равносильно выполнению $\forall\, v, w \in V$ неравенства $||w - v|| \geqslant \Big|\, ||w|| - ||v||\, \Big|$.

5.2. Метрическая топология. Напомним, что для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ ε-шаром с центром в точке p метрического пространства X называется множество

$$B_\varepsilon(p) = \{ q \in X \mid \varrho(p,q) \leqslant \varepsilon \} .$$

Подмножества $U \subset X$, которые вместе с каждой своей точкой содержат и некоторый ε-шар с центром в этой точке, называются *открытыми*, и как известно, задают на X топологию, называемую *метрической топологией*.

Упражнение 5.2. Выведите из определяющих свойств метрики определяющие свойства системы открытых множеств топологии.

Например, *стандартная топология* на $\mathbb{R}^n$, которую мы использовали в прошлом параграфе, является метрической топологией, индуцированной нормой

$$\left\| \sum x_i e_i \right\|_{\mathrm{st}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_i |x_i|$$

(максимум модуля координат), которую мы будем называть *стандартной*. Обратите внимание, что ε-шары относительно этой нормы — это в точности ε-кубы, которыми мы пользовались.

Оказывается, что *все* нормы на $\mathbb{R}^n$ задают одну и ту же топологию.

5.2.1. ЛЕММА. *Произвольная норма на $\mathbb{R}^n$ непрерывна в стандартной топологии.*

Доказательство. Обозначим через $e_i \in \mathbb{R}^n$ стандартные базисные векторы и положим $M = \max\limits_i ||e_i||$. Тогда

$$||v|| = \left\|\sum x_i e_i\right\| \leqslant \sum |x_i| \cdot ||e_i|| \leqslant nM \max_i |x_i| = nM \cdot ||v||_{\mathrm{st}} \qquad \forall\, v\in\mathbb{R}^n$$

и $\forall \varepsilon > 0$ при $||v-w||_{\mathrm{st}} < \delta = \varepsilon/2nM$ мы получаем $\Big|\, ||v|| - ||w|| \,\Big| \leqslant ||v-w|| < nM \cdot ||v-w||_{\mathrm{st}} < \varepsilon$. □

5.2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Для любой нормы $||\cdot||$ существуют вещественные положительные константы μ и M, такие, что* $\forall\, v\in\mathbb{R}^n$

$$\mu \cdot ||v||_{\mathrm{st}} \leqslant ||v|| \leqslant M \cdot ||v||_{\mathrm{st}} \ . \tag{5-1}$$

Доказательство. Граница стандартного единичного 1-куба с центром в нуле

$$K = \{v \in \mathbb{R}^n \mid ||v||_{\mathrm{st}} = 1\}$$

является компактом, и непрерывная функция $||\cdot||$ достигает на нём своих максимального и минимального значений $M = \sup(||v|| \mid v \in K)$ и $\mu = \inf(||v|| \mid v \in K)$, причём $\mu > 0$, т.к. иначе существовала бы сходящаяся в K последовательность $v_i \in K$ с $||v_i|| \to 0$, что в силу непрерывности $||\cdot||$ и невырожденности нормы означало бы $\lim v_i = 0 \in K$, что не так.

Таким образом, $\forall\, w\in K$ имеем $0 < \mu \leqslant ||w|| \leqslant M < \infty$. Применяя это к $w = v/||v||_{\mathrm{st}} \in K$ для любого $v \neq 0$, мы получаем требуемое неравенство (5-1). □

5.2.3. СЛЕДСТВИЕ. *Любая норма индуцируют на $\mathbb{R}^n$ стандартную топологию (сходимость в которой означает покоординатную сходимость).* □

5.3. Геометрическое описание норм. Сопоставим каждой норме $||\cdot||$ на векторном пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$ её единичный шар с центром в нуле

$$\Phi = B_1(0) = \{v \in V \mid ||v|| \leqslant 1\} \ . \tag{5-2}$$

Это ограниченное замкнутое[1] множество, содержащее нуль внутри и центрально симметричное относительно нуля, а также выпуклое, поскольку $\forall\, v, w$ с $||v||, ||w|| \leqslant 1$ и $\forall\, \lambda, \mu > 0$ с $\lambda + \mu = 1$ имеем

$$||\lambda v + \mu w|| \leqslant \lambda ||v|| + \mu ||w|| \leqslant 1 \ .$$

Заметим, что норма $||\cdot||$ однозначно восстанавливается по фигуре Φ по формуле

$$||v|| = \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid v \in \lambda\Phi) \ . \tag{5-3}$$

5.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сопоставления* (5-2) *и* (5-3) *устанавливают взаимно однозначное соответствие между ограничеснными замкнутыми выпуклыми множествами $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, содержащими нуль внутри и центрально симметричными относительно нуля, и нормами на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Положительность, невырожденность и однородность функции $||v||_\Phi$, задаваемой формулой (5-3) очевидны[2]. Неравенство треугольника следует из выпуклости: $\forall\, v, w \in V$ точка

$$q = \frac{v+w}{||v||_\Phi + ||w||_\Phi} = \frac{||v||_\Phi}{||v||_\Phi + ||w||_\Phi} \cdot \frac{v}{||v||_\Phi} \ + \ \frac{||w||_\Phi}{||v||_\Phi + ||w||_\Phi} \cdot \frac{w}{||w||_\Phi}$$

является выпуклой барицентрической комбинацией лежащих в Φ точек $v/||v||_\Phi$ и $w/||w||_\Phi$. Поэтому $q \in \Phi$, и значит $||v+w||_\Phi \leqslant ||v||_\Phi + ||w||_\Phi$. □

[1] замкнутость вытекает из непрерывности нормы

[2] и вообще их достаточно проверить только для $n = 1$

5.4. Скалярные произведения. Вещественное векторное пространство $V \simeq \mathbb{R}^n$ называется *евклидовым*, если на нём задана симметричная положительно определённая билинейная форма[3]

$$V \times V \xrightarrow{v,w \mapsto (v,w)} \mathbb{R} .$$

Подробнее, эти свойства означают:

(1) симметричность: $(v,w) = (w,v)$,
(2) положительность: $(v,v) > 0$ при $v \neq 0$,
(3) билинейность: $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \, , \, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1\mu_1 \cdot (v_1,w_1) + \lambda_1\mu_2 \cdot (v_1,w_2) + \lambda_2\mu_1 \cdot (v_2,w_1) + \lambda_2\mu_2 \cdot (v_2,w_2)$.

Вследствие билинейности, скалярное произведение однозначно определяется своей *матрицей Грама* $((e_i,e_j))$, описывающей таблицу умножения базисных векторов. Базисы, в которых матрица Грама единичная, называются *ортонормальными*. Согласно теореме Лагранжа (см. n° 2.1.1) ортонормальные базисы всегда существуют: достаточно взять любой базис $\{e_i\}$ с диагональной матрицей Грама[4] и нормировать базисные векторы по формуле

$$e_i \longmapsto e_i / \sqrt{(e_i,e_i)}$$

($(e_i,e_i) > 0$ в следствие положительности скалярного произведения).

Более общим образом, с любым набором векторов $(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ также можно связать матрицу их попарных скалярных произведений

$$G_{(v_1,v_2,\ldots,v_m)} = ((v_i,v_j)) \ ,$$

которая также называется *матрицей Грама* набора $(v_1,v_2,\ldots,v_m)$. Если два набора векторов линейно выражаются один через другой посредством некоторой матрицы коэффициентов C:

$$(v'_1,v'_2,\ldots,v'_m) = (v_1,v_2,\ldots,v_k) \cdot C$$

Их матрицы Грама $G' = G_{(v'_1,v'_2,\ldots,v'_m)}$ и $G = G_{(v_1,v_2,\ldots,v_k)}$ будут связаны преобразованием

$$G' = C^t G C \ . \tag{5-4}$$

5.4.1. ЛЕММА. *Определитель матрицы Грама любого набора векторов неотрицателен*

$$\det G_{(v_1,v_2,\ldots,v_m)} \geqslant 0 \ , \tag{5-5}$$

и его обращение в нуль равносильно линейной зависимости векторов.

Доказательство. Если, скажем, $v_1 = \sum\limits_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu v_\nu$, то $(v_1,v_k) = \sum\limits_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu (a_\nu, a_k)$ при всех k, и первая строка матрицы Грама будет линейной комбинацией остальных, так что $\det G_{(v_1,v_2,\ldots,v_m)} = 0$. Если же векторы v_i линейно независимы, то они образуют базис в своей линейной оболочке $W \subset V$. Ограничение скалярного произведения с V на W является скалярным произведением на W, и мы можем выбрать в W ортонормированный базис $(e_1,e_2,\ldots,e_m) = (v_1,v_2,\ldots,v_m) \cdot C$, где C — некоторая невырожденная квадратная матрица. Тогда по (5-4)

$$1 = \det G_{(e_1,e_2,\ldots,e_m)} = \det G_{(v_1,v_2,\ldots,v_m)} \cdot \det C^2$$

откуда $\det G_{(v_1,v_2,\ldots,v_m)} > 0$. □

5.4.2. Пример: неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Для двух векторов (v,w) с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix}$$

[3] она называется *скалярным произведением* или *евклидовой структурой* на V
[4] такие базисы называются *ортогональными*

неравенство (5-5) означает, что
$$(v,v)\cdot(w,w) \geqslant (v,w)^2 \ , \tag{5-6}$$
причём равенство равносильно тому, что $v = \lambda \cdot w$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. В зависимости от контекста, это неравенство называют неравенством *Коши*, *Буняковского* или *Шварца*. Так, будучи записано в ортонормальном базисе, оно говорит, что
$$(x_1^2 + x_2^2 + \ \cdots \ + x_n^2)(y_1^2 + y_1^2 + \ \cdots \ + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_1y_1 + \ \cdots \ + x_ny_n)^2$$
для любых наборов вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$. А будучи применённым к паре непрерывных вещественных функций на отрезке $[a,b]$ и скалярному произведению
$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \ , \tag{5-7}$$
оно даст неравенство $\left(\int f^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g^2(x)\,dx\right) \geqslant \left(\int f(x)g(x)\,dx\right)^2$.

Упражнение 5.3. Проверьте, что формула (5-7) действительно задаёт евклидову структуру на пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.

5.5. Евклидовы метрики. Евклидова длина $||v|| = \sqrt{(v,v)}$, индуцированная скалярным произведением, является нормой на векторном пространстве V: однородность и положительность заложены в свойства скалярного произведения, а неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши – Буняковского – Шварца:
$$(||v|| + ||w||)^2 = (v,v) + (w,w) + 2\sqrt{(v,v)(w,w)} \geqslant (v,v) + (w,w) + 2(v,w) = ||v+w||^2 \ .$$
Однако, не всякая норма на V может быть индуцирована скалярным произведением. Препятствием является *тождество параллелограмма*[5]:
$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2\left(||v||^2 + ||w||^2\right) \ , \tag{5-8}$$
которое справедливо, если $||v||^2 = (v,v)$ происходит из скалярного произведения, но нарушается, скажем, уже для *стандартной* нормы на $\mathbb{R}^n$, задаваемой максимумом модулей координат (так что и стороны и диагонали квадрата, нятянутого на базисные орты, будут иметь длину 1).

5.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Чтобы норма была индуцирована скалярным произведением необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла тождеству параллелограмма.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Наоборот, для любой нормы мы можем положить
$$(v,w) = \frac{1}{4}\,(||v+w|| - ||v-w||) \ .$$
Это симметричная невырожденная положительная вещественная функция на $V \times V$.

Упражнение 5.4. Покажите, что если $||\cdot||$ удовлетворяет тождеству параллелограмма, то $(v_1+v_2,w) = (v_1,w) + (v_2,w)$ и $(v, w_1+w_2) = (v,w_1) + (v,w_2)$.

Таким образом, полученная функция будет аддитивна по каждому аргументу, откуда вытекает её билинейность по отношению к линейным комбинациям с целыми, а стало быть, и с рациональными коэффициентами. Билинейность по отношению к любым вещественным линейным комбинациям следует отсюда в виду непрерывности нормы. □

5.6. Евклидова геометрия. Определим евклидовы *длину* и *угол* формулами:
$$||v|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v,v)} \tag{5-9}$$
$$\cos(\widehat{vw}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v,w)}{||v||\cdot||w||} \tag{5-10}$$

[5] сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон

Корректность второго определения (т. е. принадлежность правой части формулы (5-10) отрезку $[-1, 1]$) вытекает из неравенства Коши – Буняковского – Шварца. Заинтересованный читатель без труда проверит, что такое определение угла согласуется с ожидаемыми геометрическими свойствами углов (типа аддитивности) и в случае $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ совпадает с традиционным «школьным» представлением[6].

Помимо длин и углов, евклидова структура позволяет также зафиксировать на V *объём*. Напомним, что форма ориентированного объёма параллелепипеда, натянутого на n векторов пространства $\mathbb{R}^n$, единственна с точностью до пропорциональности и однозначно фиксируется указанием какого-нибудь эталоннго базиса, объём которого берётся за 1. В евклидовом пространстве в качестве эталонного базиса выбирают *ортонормированный* базис. Любые два ортонормированных базиса e_i и e_i' связаны иатрицей перехода

$$(e_1', e_2', \dots, e_n') = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C \ ,$$

которая в силу правила преобразования матриц Грама (5-4) удовлетворяет соотношению

$$C^t \cdot C = 1 \ . \tag{5-11}$$

Матрицы, удовлетворяющие этому условию, называются *ортогональными*. Ясно, что у любой ортогональной матрицы $\det C = \pm 1$, а значит, ориентированные объёмы всех ортонормальных базисов одинаковы с точностью до знака. Ортонормальные базисы, имеющие одинаковый ориентированный объём, называются *одинаково ориентированными*, а базисы, ориентированный объём которых противоположен по знаку, называются *противоположно ориентированными*. В любом случае, абсолютная величина объёма не зависит от выбора эталонного ортонормированного базиса, и под *евклидовым объёмом* $\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ мы будем понимать именно эту абсолютную величину

$$\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} |\det C|$$

где C — матрица, по столбцам которой стоят координаты векторов v_i в произвольном ортонормальном базисе.

5.6.1. ЛЕММА. $\mathrm{vol}^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det G_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}$.

Доказательство. Если векторы линейно зависимы, то и объём и определитель Грама нулевые. Если

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C \ ,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ образуют ортонормальный базис, то

$$\mathrm{vol}^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det{}^2 C = \det G_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

поскольку $G_{(v_1, v_2, \dots, v_n)} = C^t \cdot E \cdot C$. □

5.6.2. Пример: ортогональное проектирование. Для любого векторного подпространства $U \subset V$ в евклидовом пространстве V имеется единственный линейный проектор $V \xrightarrow{\pi_U} U$, обладающий свойством

$$(v, u) = (\pi_U(v), u) \qquad \forall\, v \in V \quad \text{и} \quad \forall\, u \in U \ . \tag{5-12}$$

В самом деле, имеется отображение

$$\psi \,:\, V \xrightarrow{v \mapsto (v, *)} U^*$$

сопоставляющее каждому $v \in V$ линейную форму из U^*, задаваемую правилом

$$u \longmapsto (v, u) \ .$$

[6]отметим, что описание евклидовой геометрии как геометрии вещественного векторного прострнанства, оснащённого скалярным приозведением, является гораздо более экономным, простым и эффективным для вычислений определением, чем бесконечно длинный список «аксиом» и «постулатов» до сих пор принятый во многих школьных учебниках

Ограничение этого отображения на U является изоморфизмом

$$\varphi \, : \, U \xrightarrow[\sim]{u \mapsto (u,*)} U^* \,,$$

поскольку представляет собой корреляцию невырожденной билинейной формы[7] (ср. с n° 2.2). Условие (5-12) означает в точности, что $\pi_U = \varphi^{-1}\psi$.

Проектор π_U называется *ортогональным проектором* на U. Из (5-12) и невырожденности скалярного произведения следует, что

$$\ker \pi_U = U^\perp = \{ v \in V \mid (v,u) = 0 \;\; \forall \, u \in U \}$$

является ортогональным дополнением к U, и $V = U \oplus U^\perp$, поскольку $U \cap U^\perp = 0$ и $v - \pi_U(v) \in U^\perp$ $\forall \, v \in V$. В частности, ортогональная проекция $\pi_U(v)$ является ближайшей к концу вектора v точкой подпространства U, поскольку $\forall \, u \in U$

$$||v - (\pi_U(v) + u)||^2 = \big((v - \pi_U(v)) - u \, , (v - \pi_U(v)) - u \, \big) = ||v - \pi_U(v)||^2 + ||u||^2 \,,$$

(мы воспользовались тем, что $v - \pi_U(v) \in U^\perp$).

Практическое вычисление ортогональной проекции можно производить так: фиксируем в пространстве U базис $u_1, u_2, \ldots, u_m$, затем находим его двойственный базис $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$, определяемый из условий $(u_i, u_j^*) = \delta_{ij}$.

Упражнение 5.5. Убедитесь, что $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*) = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \cdot G^{-1}_{(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$.

Тогда вектор $\pi_U(v) = \sum\limits_{\nu=1}^{m} (v, u_\nu) \cdot u_\nu^*$ удовлетворяет соотношению (5-12) (его достаточно проверить только для базисных векторов $u = u_i$).

Упражнение 5.6. Докажите, что евклидов объём n-мерного параллелепипеда равен произведению $(n-1)$-мерного евклидова объёма произвольной его $(n-1)$-мерной грани на длину опущенной на эту грань высоты.

Упражнение 5.7. Докажите, что кратчайшее расстояние от конца вектора v до подпространства с базисом $u_1, u_2, \ldots, u_k$ равно отношению определителей Грама $\det G_{(v, u_1, u_2, \ldots, u_k)} / \det G_{(u_1, u_2, \ldots, u_k)}$.

[7] ограничение скалярного произведения с V на U является скалярным произведением на U и, в частности, невырождено