§2. Проективные квадрики.

Всюду в этой этой лекции мы предполагаем $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

2.1. Квадратичные и билинейные формы. Множество нулей $Q = (q)_0 \subset \mathbb{P}(V)$ ненулевой однородной квадратичной формы $q \in S^2V^*$ называется *проективной квадрикой*. Всякая квадратичная форма однозначно записывается как

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x \,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — вектор-строка, ${}^t x$ — столбец, полученный её транспонированием, а $A = (a_{ij})$ — *симметрическая* матрица, которая называется *матрицей Грама* и имеет в качестве a_{ij} (при $i \neq j$) половину коэффициента при $x_i x_j$ в приведённой записи q. Иначе говоря, существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{q}(u, w)$ на $V \times V$, такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и напрямую выражается через q несколькими равносильными способами:

$$\widetilde{q}(x, y) = x \cdot A \cdot {}^t y = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big) = \\ = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} \,. \tag{2-1}$$

Форму $\widetilde{q}$ можно рассматривать как (возможно, вырожденное) скалярное произведение на V. Тогда элементы матрицы Грама суть не что иное, как скалярные произведения $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$ базисных векторов $\{e_i\}$

Упражнение 2.1. Проверьте, что в другом базисе $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' будет выражаться через A по формуле $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$.

В частности, *определитель Грама* $\det q \stackrel{\text{def}}{=} \det A \in \Bbbk/(\Bbbk^*)^2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты из $\Bbbk$ не зависит от выбора базиса. Если $\det q \neq 0$, квадрика называется *невырожденной* или *гладкой*, в противном случае — *вырожденной* (или *особой*). Две квадрики называются *изоморфными* (или *проективно эквивалентными*), если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом.

2.1.1. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. *Матрица Грама произвольной квадратичная формы диагонализуется в некотором базисе.*

Доказательство. Если $q \equiv 0$, то матрица Грама диагональна. Если $q \not\equiv 0$, то $q(e) = \widetilde{q}(e, e) \neq 0$ для некоторого $e \in V$, который мы и возьмем в качестве первого вектора искомого базиса. Пространство V представляет собой прямую ортогональную сумму $(\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$, где $e^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, u \in V \mid \widetilde{q}(u, e) = 0 \,\}$ есть ортогональное дополнение к e относительно $\widetilde{q}$. В самом деле, $(\Bbbk \cdot e) \cap e^{\perp} = 0$, и любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде $\lambda e + u$ с $\lambda = \widetilde{q}(v, e)/\widetilde{q}(e, e) \in \Bbbk$ и $u = v - \lambda e \in e^{\perp}$. Заменяя V на $e^{\perp}$, найдем второй базисный вектор и т. д. □

2.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем каждая квадрика в подходящей системе координат задаётся уравнением $\sum x_i^2 = 0$; в частности все невырожденные квадрики проективно эквивалентны.*

Доказательство. Диагональные элементы матрицы Грама превращаются в единицы после преобразования базиса $e_i \longmapsto e_i/\sqrt{q(e_i)}$. □

2.1.3. Пример: квадрика на $\mathbb{P}_1$ в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = 0$ (если она невырождена), либо уравнением $x_0^2 = 0$ (если вырождена). Вырожденная квадрика называется *двойной точкой*, ибо состоит из единственной точки $(0:1)$, а её уравнение представляет собой квадрат линейной формы, обращающейся в этой точке в нуль. Неособая квадрика либо пуста, если $-\alpha \notin (\Bbbk^*)^2$ (что невозможно над алгебраически замкнутым полем), либо состоит из двух различных точек $(x_0 : x_1) = (\pm\delta : 1)$, если $-\alpha = \delta^2$ для некоторого $\delta \in \Bbbk$. Отметим, что особую квадрику можно воспринимать как вырождение неособой, отвечающее $\alpha = 0$, а также, что по модулю умножения на ненулевые квадраты значение α сравнимо с определителем Грама $\det q$ формы q, записанной в произвольном базисе. Поэтому вид квадрики на $\mathbb{P}_1$ однозначно определяется классом $-\det q$ в $\Bbbk/(\Bbbk^*)^2$: если он нулевой, мы имеем двойную точку, если единичный — пару различных точек, в оставшемся случае (возможном лишь над незамкнутым полем) квадрика пуста.

2.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Для пересечения произвольной квадрики Q с произвольной прямой ℓ имеется ровно 4 возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ есть двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.* □

2.2. Корреляции. Со всякой квадратичной формой q на V связано линейное отображение

$$V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*,$$

которое переводит вектор $v \in V$ в линейную форму

$$\widehat{q}(v) \,:\, w \longmapsto \widetilde{q}(w, v)$$

и называется *корреляцией*. Его матрица, записанная в двойственных базисах $\{e_i\} \subset V$, $\{x_i\} \subset V^*$, совпадает с матрицей Грама A. В частности, q невырождена тогда и только тогда, когда $\widehat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker \widehat{q} = \{\, v \in V \mid \widetilde{q}(w, v) = 0 \ \ \forall\, w \in V \,\}$$

называется *ядром* квадратичной формы q. Его проективизация $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker q) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

2.2.1. ТЕОРЕМА. *Пересечение $Q' = L \cap Q$ с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и Q является линейным соединением*[1] *Q' и $\operatorname{Sing} Q$.*

Доказательство. Запишем $V = K \oplus U$, где $K = \ker q$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Если $u \in U$ лежит в ядре $q|_U$, то

$$\widetilde{q}(u, u') = 0 \ \ \forall\, u' \in U \ .$$

Тогда $\forall\, v = u'' + u' \in V$ с $u'' \in K$ $u' \in U$ мы имеем $\widetilde{q}(u, v) = \widetilde{q}(u, u'') + \widetilde{q}(u, u') = 0$ т.е. $u \in \ker q \cap U = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Остаётся показать, что всякая прямая $\ell = \mathbb{P}(W)$, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$ в некоторой точке p, но не лежащая в $\operatorname{Sing} Q$ целиком, либо больше не пересекает квадрику нигде кроме p, либо пересекает Q' и лежит на квадрике целиком. Поскольку $\dim(W \cap K) = 1$, мы будем иметь и $\dim(W \cap U) = 1$, и можем выбрать в W базис $\{p, u\}$ с $p \in K$, $u \in U$. Единственным ненулевым элементом матрицы Грама ограничения $q|_W$ в этом базисе может быть лишь $q(u)$, при этом условие $q(u) \neq 0$ означает, что $q|_W$ — это двойная точка p, а условие $q(u) = 0$ означает, что $u \in Q'$ и $q|_W \equiv 0$. □

2.2.2. СЛЕДСТВИЕ. *Квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ над алгебраически замкнутым полем однозначно с точностью до изоморфизма определяется рангом своей матрицы Грама.* □

2.3. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к Q в p, если ℓ либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается T_pQ.

[1] т.е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing} Q$

2.3.1. ЛЕММА. *Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики Q, заданной уравнением $q(x) = 0$, в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{q}(a,b) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ имеет в базисе $\{a,b\}$ вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

и $\det q|_U = 0 \iff \widetilde{q}(a,b) = \widetilde{q}(b,a) = 0$. □

2.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики*[2] *Q высекается из квадрики гиперплоскостью $\operatorname{Ann}\widehat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b,x) = 0\}$.* □

2.3.3. СЛЕДСТВИЕ. *Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ попарно эквиваленты:*

$$p \in \operatorname{Sing} Q \iff T_pQ = \mathbb{P}(V) \text{ есть все пространство} \iff \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0 \text{ для всех } i\,.$$ □

2.3.4. СЛЕДСТВИЕ. *Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p,x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1.* □

2.4. Поляритеты. Пространства $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами и обозначаются через $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$, когда природа пространства V несущественна. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом, поскольку классы пропорциональных линейных форм $\xi \in V^*$ — это то же самое, что подпространства $U \subset V$ коразмерности 1. Корреляция $\widehat{q}$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\overline{q}} \mathbb{P}(V^*)$, который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики Q. Он переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p,x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно Q. Геометричеки, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как множество всех точек, лежащих на своих полярах.

Упражнение 2.2. Покажите, что p лежит на поляре q, если и только если q лежит на поляре p.

Упражнение 2.3. Рассмотрим полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно границы некоторого круга K. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой (что особенно интересно в случае, когда точка лежит внутри круга, а прямая не пересекает круг).

Отметим, что над алгебраически незамкнутыми полями имеются квадратичные формы q, задающие *пустые* квадрики Q. Однако соответствующие им полярные преобразования, тем не менее, всегда геометрически наблюдаемы и характеризуются тем, что никакая точка не лежит на своей поляре.

Упражнение 2.4. Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

2.4.1. ЛЕММА. *Два поляритета совпадают, если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.*

Доказательство. Это сразу следует из леммы n° 1.9.1. □

Таким образом, все поляритеты на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ взаимно однозначно соответствуют точками проективного пространства $\mathbb{P}_{\frac{n(n+3)}{2}} = \mathbb{P}(S^2V^*)$ классов пропорциональных симметрических квадратных матриц. Допуская (над незамкнутым полем) некоторую вольность речи, мы будем называть это пространство *пространством квадрик*.

2.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.*

[2] т. е. ГМТ касания с Q всевозможных касательных, опущенных на Q из b

Доказательство. Пусть $Q = Q'$. Поскольку при ограничении на любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q = \operatorname{Sing} Q'$ подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из леммы n° 2.4.1. □

2.4.3. Пример: пространство коник. Квадрики на $\mathbb{P}_2$ называются *проективными кониками*. Коники образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники: коника ранга 1, или *двойная прямая*, задаётся в подходящем базисе уравнением $x_0^2 = 0$, и все её точки являются особыми; коника ранга 2, или *распавшаяся коника*, задаётся в подходящем базисе уравнением $x_0^2 + x_1^2 = 0$ и представляет собой пару прямых

$$x_0 = \pm i\, x_1 \ ,$$

пересекающихся в особой точке $(0 : 0 : 1)$; наконец, коника ранга 3, или *неособая коника*, задаётся в подходящем базисе уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Другой удобной моделью неособой коники является *коника Веронезе* C_2 из упр. 1.14. Напомним, что квадратичное *отображение Веронезе*

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*) \ , \qquad (\dim U = 2)\ ,$$

переводит линейную форму $\xi \in U^*$ в ее квадрат $\xi^2 \in S^2U^*$ и устанавливает биекцию между точками $\mathbb{P}_1$ и вырожденными квадриками на $\mathbb{P}_1$, составляющими в пространстве $\mathbb{P}_2$ всех квадрик на $\mathbb{P}_1$ неособую конику

$$C_2 = \{\, q \in S^2U^* \mid \det q = 0 \,\} \ .$$

Если зафиксировать в U^* базис (x_0, x_1), а в S^2U^* — базис $\{x_0^2, 2\,x_0x_1, x_1^2\}$, и представлять линейные формы $\xi(x) = t_0x_0 + t_1x_1$ и квадратичные формы $q(x) = q_0\,x_0^2 + 2\,q_1\,x_0x_1 + q_2\,x_1^2$ однородными координатами $(t_0 : t_1)$ и $(q_0 : q_1 : q_2)$ соответственно, то коника Веронезе C_2 запишется в этих координатах дискриминантным уравнением

$$q_0q_2 - q_1^2 = 0 \ ,$$

а отображение Веронезе даст её рациональную параметризацию

$$(t_0 : t_1) \longmapsto (q_0 : q_1 : q_2) = (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2) \ . \tag{2-2}$$

Упражнение 2.5. Сравните эту параметризацию с геометрической параметризацией из n° 1.7.1.

2.4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Невырожденная коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени d, не более, чем по $2\,d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.*

Доказательство. Запараметризуем неособую конику по Веронезе как в (2-2). Тогда точки её пересечения с кривой, заданной уравнением $f(q) = 0$, отвечают значениям параметра $t = (t_0 : t_1)$, удовлетворяющим однородному уравнению $f(q(t)) = 0$, которое либо тривиально (слева стоит тождественный нуль), либо имеет степень $2\,d$. □

2.4.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.*

Доказательство. Поскольку при фиксированном p уравнение $q(p) = 0$ линейно по q, коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, то коника содержит проходящую через них прямую, и потому распадается на эту прямую и прямую, проходящую через две другие точки. Если никакие три из точек не коллинеарны, всякая проходящая через них коника автоматически неособа и единственна по n° 2.4.4. □

2.4.6. Пример: пространство квадрик на $\mathbb{P}_3$ имеет размерность 9.

Упражнение 2.6. Покажите, что любые 9 точек, а также любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике.

Особые квадрики в $\mathbb{P}_3$ над алгебраически замкнутым полем суть: *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1), *распавшаяся квадрика* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2), представляющая собой пару пересекающихся плоскостей[3] $x_0 = \pm i\, x_1$, и *простой конус*[4] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3). Заметьте, что ни на одной из них нет трёх попарно скрещивающихся прямых, так что квадрика, проходящая через три попарно скрещивающиеся прямые в соответствии с упр. 2.6, автоматически неособа.

Удобной геометрической моделью неособой квадрики является детерминантальная *квадрика Сегре*, устроенная следующим образом. Рассмотрим два двумерных векторных пространства U_-, U_+ и 4 – мерное пространство $W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ всех линейных отображений. Точки пространства $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W)$ суть ненулевые линейные отображения $U_- \xrightarrow{F} U_+$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, или что то же самое, отображения $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_-) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{P}(U_+) = \mathbb{P}_1$. Отображения ранга 1 (стягивающие всю $\mathbb{P}(U_-)$ в одну точку) образуют в пространстве $\mathbb{P}(W)$ детерминантную квадрику Сегре

$$Q_S = \left\{ F = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\} . \tag{2-3}$$

Всякий оператор F ранга 1 имеет одномерное ядро и одномерный образ, а стало быть, определяет единственные с точностью до пропорциональности вектор $v \in U_+$ и ковектор $\xi \in U_-^*$, такие что $\mathrm{im}\,(F)$ натянут на v, а $\ker(F) = \mathrm{Ann}\,(\xi)$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что с точностью до пропорциональности $F(u) = \xi(u)\cdot v \;\; \forall\, u \in U_-$, и вообще, покажите, что любая $m \times n$-матрица (a_{ij}) ранга 1 получается умножением столбца высоты справа на строку ширины m, т. е. имеет $a_{ij} = \xi_i \eta_j$ для подходящих (ξ_i) и (η_j).

2.4.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение Сегре $\mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+) \overset{s}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-, U_+))$, переводящее пару $(\xi, v) \in U_-^* \times U_+$ в оператор $\xi \otimes v \,:\; u \longmapsto \xi(u)\, v$, биективно отображает $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ на Q_S и переводит два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times v$ и $\xi \times \mathbb{P}_1$ в два семейства прямых на на Q_S. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка Q_S является точкой пересечения пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет.*

Доказательство. Биективность следует из предыдущего обсуждения и упр. 2.7.

Упражнение 2.8. Проверьте, что в координатах оператор $\xi \otimes v$, отвечающий форме $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in U_-^*$ и вектору $v = (t_0 : t_1) \in U_+$, имеет матрицу

$$\xi \otimes v = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

Чтобы проверить утверждение про прямые, заметим, что всякая 2×2-матрица ранга 1 имеет пропорциональные строки и столбцы, и матрицы с фиксированными отношениями

$$([\text{строка } 1] : [\text{строка } 2]) = (t_0 : t_1) \quad \text{или} \quad ([\text{столбец } 1] : [\text{столбец } 2]) = (\xi_0 : \xi_1)$$

составляют двумерные векторные подпространства в W (т. е. прямые на Q_S), которые как раз и являются образами прямых $\mathbb{P}_1 \times v$ и $\xi \times \mathbb{P}_1$. Из биективности отображения Сегре следует, что все соотношения инцидентности между этими прямыми такие же, как на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Чтобы показать, что никаких других прямых на Q_S нет, заметим, что всякая прямая, лежащая на Q_S и проходящая через $p \in Q_S$ содержится в конике $Q_S \cap T_x Q_S$. Но поскольку через p уже проходит пара прямых из координатных семейств, эта коника распавшаяся, и исчерпывается именно этой парой прямых. □

Упражнение 2.9. Покажите, что операторы $\xi \otimes v$ с $\xi \in U_-^*$, $u \in U_+$ линейно порождают пространство $\mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ и убедитесь в равносильности следующих трёх свойств оператора $F \in \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$:
(1) $F \in T_{\xi \otimes v} Q_S$; (2) $F(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \subset \Bbbk \cdot v$; (3) $F = \xi \otimes w + \eta \otimes v$ для некоторых $\eta \in U_-^*$, $w \in U_+$.

Упражнение 2.10. Покажите, что действие проективного изоморфизма $\mathbb{P}(U_-) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{P}(U_+)$ ассоциированного с невырожденным оператором $F \in \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$, на произвольную точку $p = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \in$

[3] или линейное соединение особой прямой и пары точек, составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой

[4] т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

$\mathbb{P}(U_-)$ допускает следующее описание: проведём плоскость π через F и прямолинейную образующую $L' = \xi \times \mathbb{P}(U_+) \subset Q_S$. Она пересекает квадрику Сегре по распавшейся конике: $\pi \cap Q_S = L' \cap L''$, где $L'' = \mathbb{P}(U_-^*) \times v \subset Q_S$ — прямая из другого семейства. Тогда $F(p) = v$.

2.4.8. СЛЕДСТВИЕ. *Существует единственная (и автоматически неособая) квадрика, проходящая через 3 данные попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$. Она заметается всеми прямыми, пересекающими каждую из трёх заданных.*

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три данных прямых должны лежать в одном из них. Но тогда прямые другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, должна лежать на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам) и быть в другом семействе. □

Упражнение 2.11. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в*) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г*) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ (найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых).

Указание. Примените «метод геометрических мест»: рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

2.5. Линейные подпространства на невырожденной квадрике. Наличие двух семейств прямолинейных образующих на невырожденной квадрике в $\mathbb{P}_3$ обобщается на старшие размерности следующим образом. Рассмотрим невырожденную квадрику $Q_n \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и лежащее на ней линейное подпространство $L = \mathbb{P}(W) \subset Q_n$.

2.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\dim L \leqslant [(n-1)/2]$, *где* $[\,*\,]$ *означает целую часть.*

Доказательство. Пусть Q_n задана квадратичной формой q с поляризацией $\widetilde{q}$ и корреляцией

$$\widehat{q} : v \longmapsto \widetilde{q}(v, *) \,,$$

которая инъективна, поскольку Q_n невырождена. Тогда

$$L \subset Q_n \iff \widetilde{q}(w_1, w_2) = 0 \;\forall\, w_1, w_2 \in W \iff \widehat{q}(W) \subset \operatorname{Ann}(W) = \{\,\xi \in V^* \mid \xi(w) = 0 \quad \forall\, w \in W\,\} \,,$$

и $\dim W \leqslant \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W$. Следовательно, $\dim W \leqslant [(\dim V)/2]$ и

$$\dim L = \dim W - 1 \leqslant [(\dim V)/2] - 1 = [(n-1)/2] \,.$$

□

2.5.2. ЛЕММА. *Если квадрика $Q_n \subset \mathbb{P}_n$ неособа, то для любой гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}_n$*

$$\operatorname{rk}\,(H \cap Q_n) \geqslant (n-1) \,.$$

Доказательство. Пусть $H = \mathbb{P}(W)$. Тогда $\dim \ker (q|_W) = \dim\big(W \cap \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)\big) \leqslant \dim \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim \operatorname{Ann} W = \dim W - 1$. □

2.5.3. ЛЕММА. *Если квадрика $Q_n \subset \mathbb{P}_n$ неособа и $x \in Q_n$, то $Q_n \cap T_x Q_n$ есть простой конус с вершиной x над невырожденной квадрикой Q_{n-2} в $(n-2)$-мерном проективном дополнительным к $\{x\}$ подпространстве в $T_x Q_n$.*

Доказательство. Поскольку $T_x Q = \mathbb{P}(\ker \widetilde{q}(x, *))$ и $\widetilde{q}(x,x) = q(x) = 0$, вектор x лежит в ядре ограничения q на $T_x Q$, а по предыдущей лемме это ядро самое большее одномерно. □

2.5.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $d_n = [(n-1)/2]$ — верхняя грань размерностей проективных подпространств, лежащих на неособой квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_n$. Тогда d_n-мерные подпространства $L \subset Q_n$, проходящие через заданную точку $x \in Q_n$, взаимно однозначно соответствуют $(d_n - 1)$-мерными подпространствами, лежащими в Q_{n-2}.*

Доказательство. Фиксируем некоторое $(n-1)$-мерное проективное подпространство $H \subset T_x Q \setminus \{x\}$ и представим $Q_n \cap T_x Q_n$ как простой конус, заметаемый прямыми, проходящими через x и невырожденную квадрику $Q_{n-2} \subset H$. Поскольку каждое $L \subset Q_n$, которое проходит через x, содержится в $Q_n \cap T_x Q_n$, оно должно быть линейной оболочкой x и некоторого $(d_n - 1)$-мерного подпространства $L' \subset Q_{n-2}$. $\square$

Например, на Q_1 и Q_2 существуют только 0-мерные подпространства. Следующие две квадрики, Q_3 и Q_4, не содержат плоскостей, но каждая точка $x \in Q_3$ лежит на паре прямых, проходящих через x и две точки квадрики $Q_1 \subset T_x Q_3 \setminus \{x\}$, а каждая точка Q_4 принадлежит 1-мерному семейству прямых, параметризованному точками невырожденной коники $Q_2 \subset T_x Q_4 \setminus \{x\}$. Далее, невырожденная квадрика $Q_5 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но для любой точки $x \in Q_5$ существует два 1-мерных семейства плоскостей, проходящих через x: каждое из них параметризовано соответствующим семейством прямых на $Q_3 \subset T_x Q_5 \setminus \{x\}$, т. е. проективной прямой.