## §1. Проективное пространство.

Векторное пространство $V$ над произвольным полем $\Bbbk$ является объектом из мира линейной алгебры: векторы — это «то, что можно складывать и умножать на числа». Со всяким векторным пространством можно связать нелинейный алгебраический объект — *алгебру полиномов* и два геометрических пространства — *аффинное* и *проективное*, в которых можно рисовать картинки, состоящие из *точек*.

**1.1. Алгебра полиномов.** Все линейные функции $V \longrightarrow \Bbbk$ образуют векторное пространство, называемое *сопряжённым* или *двойственным* к $V$, и с каждым базисом

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset V$$

связан *двойственный* базис, состоящий из координатных линейных функций[1]

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset V^*$$

Полиномиальная алгебра пространства $V$ — это алгебра многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Мы будем обозначать через $S^d V^* \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ векторное подпространство всех однородных многочленов степени $d$. Тогда

$$\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geqslant 0} S^d V^* ,$$

причём $S^r V^* \cdot S^s V^* \subset S^{r+s} V^*$, т. е. $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — это *градуированная* $\Bbbk$-алгебра с компонентами $S^d V^*$. Имеется очевидный гомоморфизм алгебр

$$\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \xrightarrow{\alpha} \{\text{функции на } V \longrightarrow \Bbbk\} , \tag{1-1}$$

переводящий многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в функцию

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \longmapsto f(p) = f(p_1, p_2, \dots, p_n) .$$

Образ этого гомоморфизма называется *пространством алгебраических функций* на $V$. Ясно, что пространство алгебраических функций, а также все его подпространства не зависят от выбора базиса в $V$.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что подпространства $\alpha(S^d V^*)$ в пространстве функций на $V$ не зависят от выбора базиса в $V$.

**1.1.1.** ЛЕММА. *Отображение* (1-1) *инъективно*[2] *тогда и только тогда, когда основное поле* $\Bbbk$ *бесконечно.*

Доказательство. Если $\Bbbk$ конечное, скажем, состоит из $q$ элементов, то пространство $\Bbbk$-значных функций на $V$ состоит из $q^{q^n}$ элементов и также конечно. Поскольку $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ бесконечна, $\ker \alpha \neq 0$. Обратное доказывается индукцией по $n$. Ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной не может иметь больше, чем $\deg f$ корней, и потому не может быть тождественно нулевой функцией на бесконечном множестве. Многочлен от $n$ переменных можно воспринимать как многочлен от одной переменной $x_n$ с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu} .$$

Вычисляя $\varphi_\nu$ в каждой точке $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, мы каждый раз получаем многочлен от $x_n$ с постоянными коэффициентами, который, как мы видели, должен быть нулевым. Итак, все $\varphi_\nu$ — тождественно нулевые функции, а значит, (по предположению индукции) и нулевые многочлены. □

[1] таких, что $x_i(e_i) = 1$, и $x_i(e_j) = 0$ при $i \neq j$

[2] т. е. различные многочлены должны задавать различные функции на $V$

**1.2. Аффинизация $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$** $n$-мерного векторного пространства $V$ — это множество, точками которого, по определению, являются векторы из $V$. Точка, представляющая нулевой вектор, называется *началом координат* и обозначается через $O$. Все прочие точки можно представлять себе как концы всевозможных ненулевых «радиус-векторов», отложенных от начала координат. Отметим, что 0-мерное пространство $\mathbb{A}^0 = \mathbb{A}(\overrightarrow{0})$ состоит из одной точки. Множество $X \subset \mathbb{A}(V)$ всех решений какой-либо (возможно, бесконечной) системы полиномиальных уравнений называется *аффинным алгебраическим многообразием*.

Простейшим нетривиальным подмногообразием является *аффинная гиперплоскость*, т.е. фигура, задаваемая линейным уравнением

$$\xi(x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = c \tag{1-2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in V^*$ — некоторая линейная форма, и $c \in \Bbbk$ — константа. Такая гиперплоскость очевидно получается параллельным сдвигом точек, происходящих из $(n-1)$-мерного векторного подпространства $\operatorname{Ann}(\xi) \subset V$, задаваемого однородным уравнением

$$\xi(x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = 0$$

на любой вектор $v$ с $\xi(v) = c$ (т.е. удовлетворяющий неоднородному уравнению (1-2)).

Аналогично, любая система неоднородных линейных уравнений $f_i(x) = c_i$ определяет пересечение соответствующих гиперплоскостей и представляет собой фигуру, получающуюся сдвигом точек из векторного подпространства

$$\bigcap_i \operatorname{Ann}(f_i) \subset V \tag{1-3}$$

(возможно нулевого, т.е. состоящего всего из одной точки $O$) на какой-нибудь вектор $v$, удовлетворяющий неоднородным уравнением $f_i(v) = c_i$ (если такого вектора нет, пересечение гиперплоскостей пусто). Пересечения гиперплоскостей называются *аффинными подпространствами*. Векторное подпространство (1-3) называется *направляющим подпространством* соответствующего аффинного подпространства.

Упражнение 1.2. Убедитесь, что оно зависит только от линейной оболочки $F$ линейных форм $f_i$ в $V^*$ и имеет размерность $\dim V - \dim F$.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что через любые $k+1$ точек, не лежащих в одной $(k-1)$-мерной плоскости, проходит и притом только одна $k$-мерная плоскость, и покажите, что подмножество в $\mathbb{A}(V)$ тогда и только тогда является аффинным подпространством, когда вместе с каждыми двумя точками оно содержит и проходящую через них прямую.

Под *размерностью* аффинного подпространства всегда понимается размерность его направляющего подпространства. Одномерные, двумерные и т.п. аффинные подпространства называются прямыми, плоскостями и т.п.

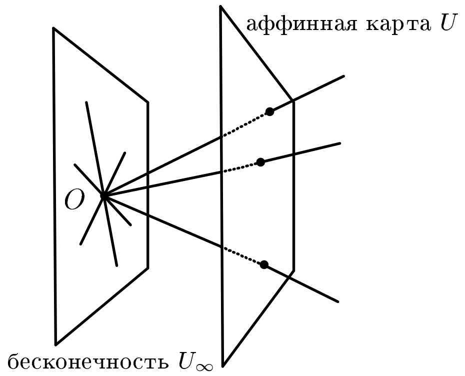


**Рис. 1◇1.** Проективный мир.

**1.3. Проективизация $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$** $(n+1)$-мерного векторного пространства $V$ — это множество, точками которого, по определению, являются одномерные подпространства в $V$, или, что то же самое, прямые в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$, проходящие через начало координат. Чтобы видеть идущие из начала координат прямые как «обычные точки», внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U \subset \mathbb{A}(V)$ коразмерности 1, как на рис. 1◇1. Любой такой экран называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. Заметьте, что ни одна аффинная карта не покрывает $\mathbb{P}_n$ целиком: дополнение $U_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \setminus U$ состоит из всех прямых, лежащих в проходящей через начало координат плоскости, параллельной $U$, и естественно отождествляется с $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}(V)$. Оно называется *бесконечной гиперплоскостью* для карты $U$. Таким образом, $\mathbb{P}_n$ разбивается в объединение непересекающихся «аффинных клеток»:

$$\mathbb{P}_n = U \sqcup U_\infty = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \ \cdots \ = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0 \ .$$

Упражнение 1.4. Какое соотношение на число точек над конечным полем из $q$ элементов получается из этого разбиения?

**1.4. Глобальные однородные координаты.** Зафиксируем в $(n+1)$-мерном пространстве $V$ какой-нибудь базис $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Два вектора

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \ , \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

тогда и только тогда задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$, когда они пропорциональны: все $x_\nu = \lambda y_\nu$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Поэтому точке $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствует не сам набор координат, а только набор их отношений $(x_0 : x_1 : \ \ldots \ : x_n)$, который называется *однородными координатами* точки $p$ в базисе $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset V$. Отметим, что в проективной геометрии, в отличие от аффинной, многочлен $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ уже не задаёт никакой функции на $\mathbb{P}_n$. Тем не менее, для любого однородного многочлена $f \in S^d(V^*)$ множество его нулей

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

является корректно определенным подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку

$$f(v) = 0 \Longleftrightarrow f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0 \ .$$

Такие множества, а также всевозможные их пересечения называются *проективными алгебраическими многообразиями*. Например, уравнение $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ задает кривую $C \subset \mathbb{P}_2$, которая (если $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$) называется *невырожденной коникой*.

**1.5. Локальные аффинные координаты.** Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту

$$U_\xi = \{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1 \} \ ,$$

где $\xi \in V^*$. Любые $n$ линейных форм $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*$, ограничения которых на $U_\xi$ линейно независимы[3], задают *локальные* аффинные координаты, действующие внутри карты $U_\xi$. Чтобы вычислить их значения в точке $p = (x_0 : x_1 : \ \ldots \ : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке $p$, вектор $v = p/\xi(p) \in U_\xi$, а затем вычислить значения $n$ линейных форм $\xi_\nu$ на этом векторе. Получающиеся таким образом локальные аффинные координаты $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) зависят как от выбора $U_\xi$, так и от выбора $\xi_i$ и охватывают только те точки $p$, для которых $\xi(p) \neq 0$. Обратите внимание, что оба высказывания: «$\xi(p) \to 0$» и «$x_i(p) \to \infty$ для некоторого $i$» означают, что $p$ убегает с $U_\xi$ на бесконечность $U_{\xi,\infty} = \mathbb{P}_n \setminus U_\xi = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 0\}$.

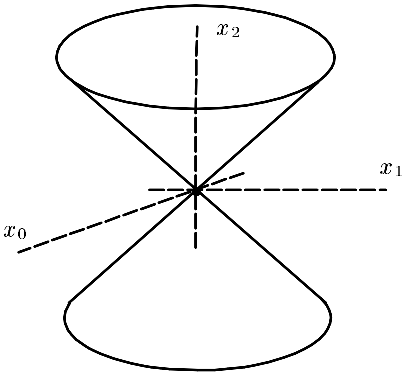


**Рис. 1◇2.** Конус.

**1.5.1.** Пример: аффинные коники. Рассмотрим невырожденную конику

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-4}$$

над $\Bbbk = \mathbb{R}$ в некоторых аффинных картах. В $U_{x_0}$, где $x_0 = 1$, в локальных координатах $t_1 = x_1|_{U_{x_0}} = x_1/x_0$ и $t_2 = x_2|_{U_{x_0}} = x_2/x_0$ уравнение (1-4) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_2}$, где $x_2 = 1$, с локальными аффинными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$, $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. Наконец, в карте $U_{x_2 - x_1}$, где $x_2 = 1 + x_1$, в локальных аффинных

[3]это равносильно тому, что $n+1$ форм $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образуют базис в $V^*$

координатах $t = x_0|_{U_{x_2-x_1}} = x_0/(x_2-x_1)$ , $u = (x_2+x_1)|_{U_{x_2-x_1}} = (x_2+x_1)/(x_2-x_1)$ мы получим уравнение параболы $u = t^2$ (надо перенести $x_1^2$ в (1-4) слева направо и поделить обе части на $(x_2-x_1)^2$).

Упражнение 1.5. Аффинный конус $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ в $\mathbb{A}^3$ изображен на рис. 1◇2. Нарисуйте каждую из 3-х рассмотренных выше аффинных карт и её пересечение с конусом.

**1.5.2.** Пример: стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$ состоит из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на $U_\nu$ берутся $n$ форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\ i \neq \nu\,.$$

Пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких $x$, у которых обе координаты $x_\mu$ и $x_\nu$ не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на $U_\mu$ и $U_\nu$ это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$ , если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$. Например, $\mathbb{P}_1$ может быть изготовлена из двух копий $\mathbb{A}^1$ путем отождествления при всех $t \neq 0$ точки $t$ на одной из них с точкой $1/t$ на другой.

Упражнение 1.6*. Если вы знакомы с дифференциальной топологией, убедитесь, что действительные и комплексные проективные пространства являются гладкими многообразиями.

Упражнение 1.7*. Проверьте, что вещественные проективные пространства $\mathbb{RP}_1$, $\mathbb{RP}_2$ и $\mathbb{RP}_3$ диффеоморфны, соответственно, окружности $S^1$, ленте Мёбиуса с заклеенной кругом границей[4], и группе $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ вращений трёхмерного евклидова пространства вокруг начала координат.

Упражнение 1.8*. Проверьте, что $\mathbb{CP}_1$ как комплексно-аналитическое многообразие изоморфно римановой сфере $S^2$.

**1.5.3.** Пример: проективное замыкание аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ — это такое проективное алгебраическое многообразие $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}_n$, пересечение которого со стандартной аффинной картой $U_0$ совпадает с $X$. Геометрически оно получается добавлением к $X$ лежащих на бесконечности точек, отвечающих всем его *ассимптотическим направлениям*. Алгебраически, $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}_n$ задаётся однородными уравнениями $\widetilde{f}_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, которые получаются из (неоднородных) уравнений

$$f_\nu(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0\,,$$

задающих $X \subset \mathbb{A}^n$, заменой каждого монома $t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ на моном[5] $x_0^{\deg f_\nu - \sum m_i} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ степени $\deg f_\nu$. Например проективным замыканием аффинной кривой $t_1 = t_2^3$ является проективная кривая

$$x_0^2 x_1 = x_2^3\,,$$

которая в другой аффинной карте $U_1$ превращается в полукубическую параболу $t_0^2 = t_2^3$, имеющую *каспидальную особенность*[6] в начале координат.

**1.6. Проективные подпространства.** Проективное алгебраическое многообразие, задаваемое системой *линейных* однородных уравнений называется *проективным подпространством*. Любое такое подмногообразие имеет вид $L = \mathbb{P}(W)$ для подходящего векторного пространства $W \subset V$. Поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}(V)}\mathbb{P}(W) = \mathrm{codim}_V W$, любые два проективных подпространства $L_1$ и $L_2$ с $\mathrm{codim} L_1 + \mathrm{codim} L_2 \leqslant n$ имеют непустое пересечение $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Например, любые две проективные прямые в $\mathbb{P}_2$ имеют непустое пересечение[7]. Два проективных подпространства $L_1$ и $L_2$ в $\mathbb{P}_n$ называются *дополнительными* друг к другу, если

$$L_1 \cap L_2 = \varnothing \qquad \text{и} \qquad \dim L_1 + \dim L_2 = n - 1\,.$$

[4] напомним, что границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность

[5] это соответствует подстановке в $\nu$-тое уравнение $t_i = x_i/x_0$ и умножению обеих частей на $x_0^{\deg f_\nu}$

[6] т. е. «остриё» или «точку возврата»

[7] в терминах $\mathbb{A}^3$ это значит, что любые две плоскости, содержащие начало координат, пересекаются по прямой

Например, любые две скрещивающиеся прямые в 3-мерном пространстве дополнительны.

Упражнение 1.9. Покажите, что $\mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}(W)$ являются дополнительными в $\mathbb{P}(V)$, если и только если $V = U \oplus W$.

**1.6.1.** ЛЕММА. *Если подпространства $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}(V)$ дополнительны, то любая точка $p \in \mathbb{P}(V) \setminus (L_1 \cup L_2)$ лежит на единственной прямой, пересекающей каждое из них.*

Доказательство. Поскольку $V = U_1 \oplus U_2$, где $\mathbb{P}(U_i) = L_i$, любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u_1 + u_2$ с $u_i \in U_i$. Если $v \notin U_1 \cup U_2$, то и $u_1$ и $u_2$ ненулевые и порождают единственное 2-мерное подпространство, содержащее $v$ и имеющее ненулевое пересечение с обеими $U_i$. □

**1.7. Проекции.** Для любой пары дополнительных подпространств $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n$ *проекция на* $L_2$ *с центром в* $L_1$: $\pi_{L_2}^{L_1} : (\mathbb{P}_n \setminus L_1) \longrightarrow L_2$ переводит все точки $q \in L_2$ в себя, а каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \sqcup L_2)$ — в точку пересечения $\ell \cap L_2$, где $\ell$ — это единственная прямая, проходящая через $p$ и пересекающая $L_1$ и $L_2$, как в n° 1.6.1. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ таких, что $L_1$ имеет координаты $(x_0 : x_1 : \ldots : x_m)$ и $L_2$ имеет координаты $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ldots : x_n)$, проекция $\pi_{L_2}^{L_1}$ просто удаляет первые $(m+1)$ координат $x_\nu$ с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

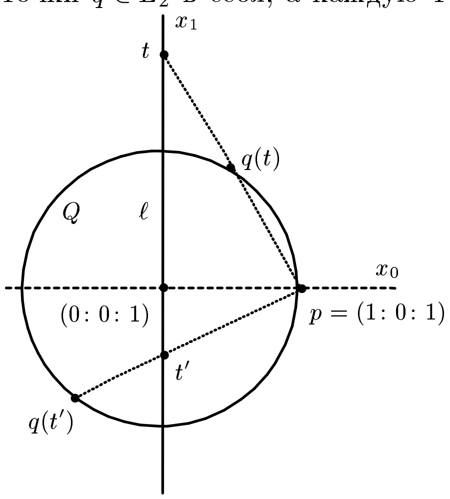

**Рис. 1◇3.** Проектирование коники.

**1.7.1.** Пример: проектирование коники на прямую. Рассмотрим проекцию $\pi_L^p : Q \longrightarrow L$ коники $Q$, заданной уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$, на прямую $L$, заданную уравнением $x_0 = 0$, из точки $p = (1 : 0 : 1) \in Q$. В стандартной аффинной карте $U_2$, где $x_2 = 1$, всё это выглядит как на рис. 1◇3. Такая проекция устанавливает *бирациональную биекцию* между $L$ и $Q$: каждая проходящая через $p$ прямая $\ell(t) = (pt)$, за исключением касательной[8], пересекает $Q$ ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от $p$, и отношения $(q_0 : q_1 : q_2) \in Q$ и $(0 : t_1 : t_2) \in L$ суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$(t_1 : t_2) = (\, q_1 : (q_2 - q_0)\,)$$
$$(q_0 : q_1 : q_2) = (\, (t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)\,)$$

Упражнение 1.10. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что вторая из них дает полный список пифагоровых троек[9] $(q_0 : q_1 : q_2)$, когда $(t_1 : t_2)$ пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**1.8. Матричные обозначения для линейных отображений.** Обозначим пространство всех $\Bbbk$-линейных отображений из $n$-мерного векторного пространства $U$ в $m$-мерное векторное пространство $W$ через $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$, а пространство матриц из $m$ строк, $n$ столбцов и элементами из $\Bbbk$ — через $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$. Каждая пара базисов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset U$ и $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subset W$ задает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\ ,$$

переводящий оператор $U \xrightarrow{\alpha} W$ в матрицу $A = (a_{ij})$, $j$-й столбец которой состоит из $m$ координат вектора $\alpha(u_j) \in W$ в базисе $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, т. е. в матричных обозначениях,

$$(\alpha(u_1),\, \alpha(u_2),\, \ldots\, ,\, \alpha(u_n)) = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \cdot A\ .$$

Если обозначить через ${}^t x$, ${}^t y$ координатные столбцы, получающиеся транспонированием строк координат вектора $u = \sum x_i u_i \in U$ и его образа $\alpha(u) = \sum y_i w_i \in W$, то мы можем написать

$$(w_1, w_2, \ldots, w_m) \cdot {}^t z = \alpha(u) = \alpha((u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot {}^t y) =$$
$$= (\alpha(u_1),\, \alpha(u_2),\, \ldots\, ,\, \alpha(u_n)) \cdot {}^t y = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \cdot (\, A\,{}^t y\,)$$

[8] которая задается уравнением $x_0 = x_2$, пересекает $\ell$ в бесконечно удалённой точке $t = (0 : 1 : 0)$ и отвечает самой точке $p = q(\infty)$

[9] т. е. целых решений уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

откуда ${}^t z = A\, {}^t y$.

**1.9. Линейные проективные преобразования.** Пусть теперь $\dim U = \dim W = (n+1)$. Любой линейный изоморфизм $U \xrightarrow{F} W$ порождает биекцию $\mathbb{P}(U) \xrightarrow{\overline{F}} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *линейным изоморфизмом*.

**1.9.1.** ЛЕММА. *Для любых наборов $\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U)$ и $\{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W)$ из $(n+2)$ точек, в каждом из которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости*[10]*, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $U \xrightarrow{F} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех $i$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы $u_i$ и $w_i$, представляющие точки $p_i$ и $q_i$, и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в $U$ и $W$. Поскольку никакие $(n+1)$ точек каждого из наборов не лежат в $(n-1)$-мерной гиперплоскости, все координаты вектора $u_{n+1} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ в базисе $\{u_i\}$, а также все координаты вектора $w_{n+1} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ в базисе $\{w_i\}$ отличны от нуля. Условие $\overline{F}(p_i) = q_i$ означает, что $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. Таким образом, матрица $F$ в базисах $\{u_i\}$ и $\{w_i\}$ диагональна, и её диагональные элементы $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ удовлетворяют соотношениям $y_i = \lambda_{n+1}\lambda_i \cdot x_i$ при всех $0 \leqslant i \leqslant n$. Эти соотношения однозначно с точностью до постоянного множителя определяют матричные элементы через заданные $x_i$, $y_i$ по формулам $\lambda_i = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_i/x_i)$. □

**1.9.2.** СЛЕДСТВИЕ. *Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.* □

Упражнение 1.11. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ две прямые $\ell_1$, $\ell_2$ и точку $p \notin \ell_1 \cup \ell_2$. Докажите, что проекция из $p$ определяет проективный изоморфизм $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_p} \ell_2$.

**1.10. Линейная проективная группа.** Все линейные изоморфизмы $V \longrightarrow V$ образуют так называемую *полную линейную группу* пространства $V$, которая обозначается $\mathrm{GL}(V)$. Она действует на $\mathbb{P}(V)$, и ядро этого действия согласно n° 1.9.1 совпадает с подгруппой гомотетий $H \subset \mathrm{GL}(V)$, а образ состоит из всех линейных проективных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}(V)$. Последние составляют так называемую *проективную линейную группу* пространства $V$, которая обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$. Фиксировав базис $\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subset V$, можно отождествить $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных квадратных матриц $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk) \subset \mathrm{Mat}_{n+1}(\Bbbk)$. При этом отождествлении подгруппа гомотетий переходит в подгруппу скалярных матриц $\{\lambda E\}$, и $\mathrm{PGL}(V)$ отождествляется с группой невырожденных квадратных матриц с точностью до пропорциональности

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)/\{\text{скалярные диагональные матрицы } \lambda E\}\,.$$

**1.10.1.** Пример: дробно-линейные преобразования прямой. Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу

$$(x_0 : x_1) \xmapsto{\overline{A}} (\,(ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)\,)\,,$$

В стандартной аффинной карте $U_0 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_1/x_0$, это действие имеет вид

$$t \longmapsto \frac{dt + c}{bt + a} \tag{1-5}$$

Упражнение 1.12. Для произвольных трёх различных точек $p$, $q$, $r$ явно напишите то единственное дробно-линейное преобразование (1-5), для которого $\overline{A}(p) = 0$, $\overline{A}(q) = 1$, и $\overline{A}(r) = \infty$.

**1.10.2.** ЛЕММА. *Если над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ имеется биекция*

$$\varphi\;:\;\mathbb{P}_1 \setminus \{\textit{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \setminus \{\textit{конечное множество}\}\,,$$

[10] т. е. любые представляющие их вектора образуют базис

*корректно определяемая формулой* $(x_0 : x_1) \longmapsto (f_0(x_0,x_1) : f_1(x_0,x_1))$ , *в которой* $f_1$, $f_2$ *суть рациональные алгебраические функции*[11], *то* $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$.

Доказательство. Рациональные функции $f_i$ корректно задают преобразование проективной прямой только если они однородны и имеют одинаковую степень.

Упражнение 1.13. Докажите это.

Увеличивая, если надо, выкинутые из прямой конечные множества, мы можем домножить $f_i$ на общий знаменатель, затем сократить их наибольший общий делитель, и считать, таким образом, что $f_i$ являются взаимно простыми многочленами одинаковой степени $d$. Поскольку почти любая точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет ровно один прообраз, однородное уравнение

$$\vartheta_1 \cdot f_0(x_0,x_1) - \vartheta_0 \cdot f_1(x_0,x_1) = 0 \tag{1-6}$$

имеет с точностью до пропорциональности ровно один корень, т. е. его левая часть является для почти всех $\vartheta$ чистой $d$-й степенью некоторой линейной формы от $(x_0 : x_1)$. Все однородные многочлены степени $d$ от $(x_0 : x_1)$, рассматриваемые с точностью до скалярного множителя, образуют проективное пространство $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^dU^*)$ (где $U$ — это 2-мерное векторное подпространство, подлежащее нашей проективной прямой $\mathbb{P}_1$). Когда $\vartheta$ пробегает $\mathbb{P}_1$, левая часть (1-6) рисует в этом $\mathbb{P}_d$ прямую $(f_0, f_1)$. Между тем при $d \geqslant 2$ чистые $d$-е степени линейных форм образуют в $\mathbb{P}_d$ *скрученную* кривую:

Упражнение 1.14. Рациональная *нормальная кривая*[12] $C_d \subset \mathbb{P}_d$ определяется как образ *отображения Веронезе* $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d(U^*)\right)$, переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$ в ее $d$-ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$. Покажите, что если основное поле содержит более $d$ элементов, то при $k = 2, 3, \dots, d$ никакие $(k+1)$ различных точек кривой $C_d$ не лежат ни в каком $(k-1)$-мерном подпространстве.

Указание. Будем записывать $\varphi \in U^*$ как $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1$, а $f \in S^d(U^*)$ — как $\sum\limits_{\nu} a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu}x_1^\nu$, и использовать $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1$ и на $\mathbb{P}_d$ соответственно. Тогда пересечение кривой Веронезе с $(d-1)$-мерной гиперплоскостью, заданной линейным уравнением $\sum A_\nu a_\nu = 0$, состоит из тех $(\alpha_0 : \alpha_1)$, которые удовлетворяют полиномиальному уравнению $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu}\alpha_1^\nu = 0$ степени $d$.

Итак, при $d \geqslant 2$ кривая Веронезе пересекается с любой прямой не более, чем по двум точкам. Стало быть, $d = 1$ и $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. □

[11] т. е. отношения многочленов от однородных координат

[12] она называется также *кривой Веронезе*