Письменный экзамен по алгебре

для получения оценки «отлично» достаточно набрать 71 балл

Задача 1 (10 баллов). Есть ли в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ линейное подпространство размерности $(n+1)$, состоящее из попарно коммутирующих диагонализуемых матриц?

Задача 2. В пространстве S^2V^* всех (вещественных) квадратичных форм Q на пространстве $V=\mathbb{R}^n$ рассмотрим гиперповерхность S, заданную уравнением $\det Q=0$ (т. е. гиперповерхность вырожденных квадрик). Верно ли, что

- **а) (10 баллов)** во всех точках Q, таких что $\mathrm{rk}\, Q=n-1$, гиперповерхность S гладкая (т. е. в любой такой точке $\mathrm{grad}\,\det Q\neq 0$)?
- **б) (10 баллов)** касательное пространство к S в такой точке Q состоит из всех квадратичных форм, тождественно обращающихся в нуль на ядре формы Q?

Задача 3 (10 баллов). Пусть комплексные $n\times n$-матрицы A и B таковы, что собственные значения их комбинации $A+tB$ не зависят от t. Вытекает ли из этого, что B нильпотентна?

Задача 4 (10 баллов). Какова сигнатура квадратичной формы $A\longmapsto \mathrm{tr}\,(A^2)$ на пространстве вещественных $n\times n$-матриц?

Задача 5. Зафиксируем на $\mathbb{C}^n$ стандартную эрмитову структуру. Для эрмитовой $n\times n$-матрицы A и произвольного r-мерного подпространства $L\subset\mathbb{C}^n$ положим $R_L(A)=\sum\limits_{i=1}^{r}(Ae_i,e_i)$, где $e_1,e_2,\dots,e_r\in L$ — какой-нибудь ортонормальный базис в L.

- **а) (10 баллов)** Зависит ли $R_L(A)$ от выбора ортонормального базиса в L?
- **б) (10 баллов)** Пусть матрица A имеет попарно различные собственные значения

$$\alpha_1>\alpha_2>\dots>\alpha_n\ .$$

Чему равен $\max\limits_{L} R_L(A)$ по всем r-мерным подпространствам $L\subset\mathbb{C}^n$?

Задача 6 (10 баллов). Для линейного оператора $F:V\longrightarrow V$ обозначим через

$$V^{\otimes n}\xrightarrow{F^{\otimes n}}V^{\otimes n}$$

линейный оператор, действующий по правилу $F^{\otimes n}(v_1\otimes\cdots v_n)=F(v_1)\otimes\cdots\otimes F(v_n)$. Рассмотрим произвольное конечное множество ненулевых линейных операторов $F_1,F_2,\dots,F_N$ на некотором векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$. Может ли существовать ненулевой набор констант $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N\in\Bbbk$, такой что при любом $n\geqslant 1$ оператор $\sum\limits_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu F_\nu^{\otimes n}:V^{\otimes n}\longrightarrow V^{\otimes n}$ нулевой?

Задача 7. Для векторного пространства V с базисом $e_1,e_2,\dots,e_n$ обозначим через x_i и ξ_i класс базисного вектора e_i в симметрической и внешней алгебре соответственно и рассмотрим операторы

$$\Lambda^{k+1}V\otimes S^{m-1}V\xleftarrow{\ d\ }\Lambda^kV\otimes S^mV\xrightarrow{\ \partial\ }\Lambda^{k-1}V\otimes S^{m+1}V$$

задаваемые формулами $d\overset{\mathrm{def}}{=}\sum\xi_\nu\otimes\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ и $\partial\overset{\mathrm{def}}{=}\sum\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\otimes x_\nu$.

- **а) (10 баллов)** Зависят ли d и ∂ от выбора базиса?
- **б) (10 баллов)** Вычислите $d\partial+\partial d$.