Письменный домашний экзамен по курсу «линейная алгебра и геометрия» за второй семестр

Правила сдачи экзамена. Для получения оценки «отлично» заведомо достаточно набрать 66 баллов. Задачи решаются письменно и сдаются или в мой почтовый ящик в учебной части (комн. 301), или (если учебная часть закрыта) на вахту на первом этаже, с просьбой передать Ваше послание в учебную часть А. Л. Городенцеву. Приём работ заканчивается в $10^{\underline{00}}$ утра во вторник, 23-го мая. Оценки, скорее всего, будут известны во второй половине дня в четверг, 25-го мая.

Задача 1 (10 баллов). Имеются семь одинаковых банок, каждая из которых на $\frac{9}{10}$ заполнена краской одного из семи цветов радуги (в каждой банке – свой цвет и все цвета разные). Можно ли переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое) получить хотя бы в одной из банок колер, в котором все семь красок смешаны в равной пропорции?

Задача 2 (10 баллов). Какое максимальное число векторов можно выпустить из начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ так, чтобы все углы между ними были тупыми?

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что через любые $(n+3)$ точки линейно общего положения[1] на $\mathbb{P}_n$ проходит единственная кривая Веронезе[2].

Задача 4. Обозначим через $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ множество всех вырожденных квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что

а) (5 баллов) S является алгебраической гиперповерхностью, и точка $q \in S$ является неособой точкой поверхности S тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика $q \subset \mathbb{P}_n$ является простым конусом[3];

б) (5 баллов) касательная гиперплоскость $T_qS \subset \mathbb{P}_N$ в неособой точке $q \in S$ состоит из всех квадрик на $\mathbb{P}_n$, проходящих через вершину квадрики $q \subset \mathbb{P}_n$.

Задача 5 (10 баллов). Единичная сфера $S^3 \subset \mathbb{H}$, образованная кватернионами нормы 1, является группой относительно кватернионного умножения и действует на $\mathbb{H}$ сопряжением:

$$q \,:\, \mathbb{H} \xrightarrow{x \mapsto qxq^{-1}} \mathbb{H}\,.$$

Путь кватернион $q \in S^3$ составляет угол ϑ с единичным кватернионом 1. Покажите, что сопряжение кватернионом q задаёт евклидову изометрию трёхмерного евклидова подпространства чисто мнимых кватернионов, напишите её матрицу в базисе $\{i, j, k\}$, найдите её собственные значения и выясните, вокруг какой оси и на какой угол она поворачивает это пространство. Опишите ядро и образ гомоморфизма $S^3 \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, возникающего таким образом.

Задача 6 (10 баллов). Выполняется ли в кольце многочленов от матричных элементов пары матриц A, B одинакового размера $m \times n$ с числом строк m, не превосходящим числа столбцов n, тождество

$$\det(A \cdot B^t) = \sum_{\#I=m} \det(A_I) \cdot \det(B_I)\,,$$

где суммирование производится по всем строго возрастающим наборам индексов

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_m) \subset \{1,\, 2\ \dots\ ,\, n\}\,,$$

[1] это означает, что никакие $(n+1)$ из них не лежат в одной гиперплоскости

[2] иными словами, векторное пространство, подлежащее $\mathbb{P}_n$ можно посредством линейного изоморфизма отождествить с S^nU^*, $\dim U = 2$, так чтобы все $n+3$ точки оказались чистыми n-тыми степенями линейных форм $\varphi \in U^*$, причём такое отождествление единственно с точностью до действия $\mathrm{GL}(U)$ на S^nU^* заменой переменного

[3] т. е. имеет единственную особую точку

а A_I и B_I означают $m \times m$-подматрицы, стоящие в I-столбцах?

Задача 7 (10 баллов). Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора $x\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial x}$ на пространстве многочленов степени $\leqslant n$ от x и y.

Задача 8. Свяжем с каждой невырожденной (несимметричной) билинейной формой β на векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем линейный оператор $V \xrightarrow{\varkappa} V$, определяемый требованием $\beta(v, w) = \beta(w, \varkappa v)\ \forall\, v, w \in V$. Верно ли что

- **а) (5 баллов)** две формы β и β' эквивалентны (т. е. $\beta' = C \cdot \beta \cdot C^t$ для некоторого $C \in \mathrm{GL}(V)$), если только если отвечающие им операторы подобны (т. е. $\varkappa' = D \cdot \varkappa \cdot D^{-1}$ для некоторого $D \in \mathrm{GL}(V)$);
- **б) (5 баллов)** две жордановы цепочки оператора $\varkappa$, имеющие разную длину, всегда двусторонне ортогональны[4] относительно β;
- **в) (5 баллов)** две жордановы цепочки оператора $\varkappa$ с собственными значениями λ, μ двусторонне ортогональны относительно β при $\lambda\mu \neq 1$;
- **г) (5 баллов)** жордановы цепочки оператора $\varkappa$ с собственными значениями ± 1, могут иметь произвольную длину?
- **д) (5 баллов)** Опишите точно, каким может быть набор элементарных делителей оператора $\varkappa$.

[4] т. е. $\beta(v, w) = \beta(w, v) = 0$ для любого v из линейной оболочки одной цепочки и любого w из линейной оболочки другой