§5. Овеществление и комплексификация. Кватернионы.

5.1. Овеществление.

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим новый объект $V_{\mathbb{R}}$, который как множество совпадает с V только умножать векторы мы будем не на комплексные числа, а только на вещественные.

5.1.1. Покажите, что $V_{\mathbb{R}}$ будет линейным пространством над $\mathbb{R}$. $V_{\mathbb{R}}$ называется *овеществлением* комплексного пространства V.

5.1.2. Рассмотрим $\mathbb{C}$ как одномерное комплексное пространство V. Выпишите в явном виде базис и найдите размерность пространства $V_{\mathbb{R}}$.

5.1.3. Чему равна в общем случае размерность $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ для некоторого V? Как найти базис?

5.1.4. Пусть дано линейное отображение $z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (в смысле комплексных одномерных пространств) — умножение на комплексное число $z = a + \mathrm{i}b$. Оно естественным образом индуцирует отображение $z_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Будет ли это отображение линейным отображением вещественных пространств? Какой вид будет иметь его матрица в подходящем базисе?

5.1.5. Обобщим результат предыдущей задачи на многомерный случай. Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Рассмотрим $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Докажите, что $f_{\mathbb{R}}$ — линейное отображение вещественных пространств и найдите его матрицу в подходящем базисе.

5.1.6. Пусть $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линйеный оператор. Найдите $\det A_{\mathbb{R}}$.

5.1.7. Воспользовавшись опытом, накопленным при решении предыдущих задач, найдите связь полных линейных групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Существует ли точное вложение с сохранением операций одной в другую?

Итак, мы научились из комплексных пространств делать вещественные.
А возможно ли обратное? Возможно ли из произвольного вещественного пространства сделать комплексное, то есть научить векторы некоторого вещественного пространства V умножаться не только на вещественные числа, но и на комплексные? Ответом на этот вопрос служит следующий цикл задач.

5.2. Комплексификация.

Определение. *Комплексной структурой* на вещественном пространстве V называется такой линейный оператор, который в квадрате равен минус тождественному:

$$J^2 = -\mathrm{id}_V.$$

5.2.8. Всякое ли вещественное пространство обладает комплексной структурой? Если — да, то постройте ее для произвольного пространства, если нет — приведите пример.

Пусть некоторое пространство V обладает комплексной структурой J. Введем умножение в V на комплексные числа по правилу

$$(a + \mathrm{i}b)v = av + bJ(v).$$

5.2.9. Докажите, что умножение определено корректно и что таким образом V становится настоящим комплексным пространством.(Обозначим его $V_{\mathbb{C}}$).

5.2.10. Вычислите $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$.

5.2.11. Так как построенное Вами $V_{\mathbb{C}}$ может быть овеществлено, проделайте это уже знакомое Вам действие. Чему пространство изоморфно $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$?

5.2.12. Докажите, что если некоторое вещественное пространство V обладает комплексной структурой J, то вещественная размерность V — четна и матрица J в некотором базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix},$$

где E_k — это единичная матрица размера $k \times k$.

Из последней задачи видно, что если мы хотим "окомплексить" произвольное вещественное V, то мы должны сначала его "отчетномерить", а потом выбрать некоторый базис, в котором J будет иметь канонический вид. (Выбор J обусловлен в точности выбором базиса.)
Для произвольного V введем на $V \oplus V$ комплексную структкру Y: $\quad Y(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$.

Определение. *Комплексификацией* $V^{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V мы будем называть пространство $(V \oplus V)_{\mathbb{C}}$

5.2.13. Естественно тогда представлять $V^{\mathbb{C}}$ в виде прямой суммы $V \oplus \mathrm{i}V$. Будет ли эта сумма действительно прямой над $\mathbb{R}$? над $\mathbb{C}$?

5.2.14. Для произвольного вещественного пространства V найдите какой-нибудь базис $V^{\mathbb{C}}$ и подсчитайте размерность $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$.

Пусть $A : V \to V$ — вещественный линейный оператор. Определим $A^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ формулой

$$A^{\mathbb{C}}(v_1, v_2) = (A(v_1), A(v_2)).$$

5.2.15. Будет ли $A^{\mathbb{C}}$ комплексным линейным оператором? Какой вид будет иметь матрица $A^{\mathbb{C}}$ в подходящем базисе? Вычислите $\det A^{\mathbb{C}}$.

5.2.16. Чему изоморфно $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$?

Определение. Сопряженным к комплексному пространству V называется пространство $\bar{V}$, совпадающее с V как множество с тем же сложением векторов, но с "сопряженным" умножением:

$$(z \cdot v)_{\bar{V}} = (\bar{z} \cdot v)_V$$

5.2.17. Докажите, что $\bar{V}$ — корректно определенное комплексное пространство.

5.2.18. (Трудная.) Чему изоморфно $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$?

5.2.19. (Трудная.) Найдите связь между группами Sp — симплектических матриц и U — унитарных.

5.3. Удвоение.

Всегда интересно получать новые объекты из старых, которые уже изучены и поднадоели. К примеру, кольуа, известные нам и изученные нами, составляют невеликий набор. Целые числа, поля, многочлены , матрицы — вот, пожалуй и все. Однако существует интересный метод получать новые кольца для изучения. Но сначала нужно ввести понятие антиинволюции на кольце.
Антиинволюцией A мы будем называть такое отображение $j : A \to A$, что $j(a+b) = j(a)+j(b)$, $j^2 = 1$ и $j(ab) = j(b)j(a) \quad \forall a, b \in A$.

Тогда *удвоением кольца* A назовем такой объект S, состоящий из множества пар (a, b) с операциями

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) = (ac - j(d)b, bj(c) + da).$$

Первый вопрос очевиден:

5.3.20. Будет ли удвоение A кольцом?

5.3.21. Пусть A — область целестности. Будет ли S — область целостности?

5.3.22. Пусть A — поле, будет ли S полем?

Пример. Для коммутативного кольца id_A очевидным образом подходит в качестве инволюции. Возьмем в качестве кольца поле $\mathbb{R}$. Тогда при удвоении мы получим $\mathbb{C}$, и такое построения нам давно известно. Такую же конструкцию можно построить с любым полем в качестве K.

5.3.23. Удвоим $\mathbb{C}$ с помощью $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Получится ли при этом поле?

5.3.24. Вообще, для любого поля K, характеристика, которого отлична от 2, удвоение теоретико-множественно совпадает с двумерным векторным пространством над K.

5.3.25. Является ли удвоение поля K само по себе векторным пространством?

5.3.26. Докажите, что результат удвоения поля K является алгеброй над K.

В случае некоммутативных колец удвоение является, видимо, более сложной процедурой. Хотя бы потому, что труднее найти антиинволюцию — тождественная не подходит.

5.3.27. Постарайтесь найти антиинволюцию для кольца матриц $M_n(K)$

5.3.28. Докажите, что транспонирование матриц является антиинволюцией. Что получится при удвоении по такой антиинволюции?

5.3.29. Докажите, что комплексное сопряжение является антиинволюцией в в кольце $\mathbb{C}$.

5.3.30. Если в предыдущей задаче аргументировано получаем положительный ответ, постройте удвоение $\mathbb{C}$ по сопряжению. (Обозначать это удвоение мы будем символом $\mathbb{H}$.)

5.3.31. Будет ли $\mathbb{H}$ обладать структурой двумерного комплексного пространства?

5.3.32. Будет ли $\mathbb{H}$ полем?

5.3.33. Будет ли $\mathbb{H}$ обладать структурой вещественного пространства? Если да, то какова его вещественная размерность? Найдите базис.

Определение Множество $\mathbb{H}$ с операциями сложения и умножения называется *телом кватернионов*.

5.4. Кватернионы.

5.4.34. Говорят, что элемент x лежит в *центре* колца R, если для любого $z \in R$ выполнено равенство $xz = zx$. Докажите, что элементы вида $(r, 0)$, где $r \in \mathbb{R}$ составляют центр $\mathbb{H}$.

Далее мы будем обозначать элементы вида $(r, 0)$ в $\mathbb{H}$ для $r \in \mathbb{R}$ просто через r, считая, что $\mathbb{R}$ таким образом вкладывается в $\mathbb{H}$.

5.4.35. Пусть $q \in \mathbb{H}$ такой, что $q^2 = -1$. Докажите, что элементы $a + qb$, где $a, b \in \mathbb{R}$ образуют подполе, изоморфное $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$.

5.4.36. Кватернионы q, для которых $\bar{q} = -q$ называют чисто мнимыми. Пусть I — множество чисто мнимых кватернионов. Покажите, что

(а) $q\in I \quad \Rightarrow \quad q^2\in\mathbb{R}$ и$q^2<0$.
(б) $q\in I \quad \Rightarrow \quad$ для $z=|q|^{-1}q$ выполнено $z^2=-1$.
(в) $q^2\leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad q\in I$.
(г) $I=\langle \mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\rangle_{\text{лин}}=\{\alpha\mathrm{i}+\beta\mathrm{j}+\gamma\mathrm{k};\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$ в обозначениях Гамильтона.
(д) для любого кватерниона z имеет место равенство $z=a+q$, где $a\in\mathbb{R}$ $q\in I$.

5.4.37. Докажите, что $\mathbb{H}$ можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{R}$, определяя умножение $r\cdot z$ как $(r,0)\cdot z$ (как произведение образа r при стандартном вложении $\mathbb{R}$ в $\mathbb{H}$, на z). Докажите, что при этом I — подпространство и $\mathbb{H}=\mathbb{R}\oplus I$.

5.4.38.
(а) Проверьте, что для $x,y\in I \qquad (x\bar{y}+\bar{x}y)\in\mathbb{R}$.
(б) Докажите, что формула $(x,y)=-1/2(x\bar{y}+\bar{x}y)$ определяет евклидово скалярное произведение в I.
(в) Пусть $\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$ — некоторый ортонормированный базис в I относительно выше определенного скалярного произведения. Докажите формулы Гамильтона:

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1;\quad \mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k};\quad \mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i};\quad \mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}.$$

(г) Докажите, что для $x\in I:\quad x^2=-1\ \Leftrightarrow\ (x,y)=1$.

5.4.39. Докажите, что любой кватернион является решением некоторого квадратного уравнения с коэффициентами в $\mathbb{R}$ и отрицательным дискриминантом.

5.4.40. Пусть $U=\{\alpha\in\mathbb{H},|\alpha|=1$. Покажите, что
(а) $\forall\alpha\in U$ формула $\varphi_\alpha(q)=\bar{\alpha}q\alpha$ определяет гомоморфизм $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.
(б) гомоморфизм φ_α сохраняет I и оставляет на месте каждый вещественный элемент.
(в) для элементов $x,y\in I$ выполнено $(x,y)=(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(y))$.
(г) каждое евклидово вращение в I совпадает с φ_α для некоторого $\alpha\in U$.

5.4.41. Докажите, что если $x,y\in I$, то $xy-yx\in I$. Обозначим $xy-yx=[x,y]$
(а) Проверьте, что $[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]]$
(б) Докажите, что элемент $[x,y]$ ортогонален как x, так и y, а $|[x,y]|$ совпадает с площадью параллелограмма, натянутого на x и y в евклидовом пространстве I.