§4. Евклидовы пространства.

4.1. Евклидова геометрия.

4.1.1. Описать форму сечений четырехмерного единичного стандартного куба подпространствами:

(а) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

(б) $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right.$;

найдите их объемы и объемы всех их граней.

4.1.2. Пусть P_0, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — набор из $k+1$ аффинно независимых точек n-мерного евклидова пространства. Докажите, что ГМТ равноудаленных от всех точек данного набора представляет собой $(n-k)$-мерное аффинное подпространство. Выведите отсюда, что вокруг k-мерного симплекса можно описать и при том только одну $k-1$-мерную сферу.

4.1.3. Найдите угол между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$ стандартного 4-мерного симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$.

4.1.4. Напишите уравнение $(k-1)$-аффинной гиперплоскости в k-мерном аффинном евклидовом пространстве, если известно, что она перпендикулярна данному вектору $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и:

(а) проходит через данную точку $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$;

(б) удалена от начала координат на данное расстояние d.

4.1.5. Две гиперплоскости в аффинном пространстве заданы уравнениями:
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ и $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d$.
Найдите угол между ними, а если он нулевой — расстояние.

Нижеследующие задачи обязательно уметь решать для размерностей $k = 3, 4$ (если случай произвольной размерности вызывает у вас затруднения).

4.1.6. Найдите количество осей и $(k-1)$-мерных плоскостей симметрии у k-мерных куба и кокуба.

4.1.7. Найдите количество диагоналей k-мерного куба, ортогональных данной диагонали.

4.1.8. Найдите длину диагонали стандартного k-мерного куба и ее предел при $k \mapsto \infty$.

4.1.9. Докажите, что диагонали k-мерного куба образуют одинаковые углы со всеми ребрами, найдите их, их пределы при $k \mapsto \infty$ и укажите при каком k они равны $\pi/3$.

4.1.10. Найдите углы между диагоналями и всевозможными m-мерными гранями в k-мерном кубе.

4.1.11. Найдите радиус шара, описанного вокруг стандартного k-мерного куба.

4.1.12. Найдите радиус шара, описанного вокруг стандартного k-мерного симплекса.

4.1.13. Докажите, что длина проекции ребра k-мерного куба на диагональ составляет $1/k$ часть от длины диагонали.

4.1.14. Докажите, что проекции всех вершин k-мерного куба на диагональ делят ее на k равных частей.

4.1.15. Вычислите расстояние между противоположными m и $(k-m-1)$-мерными гранями стандартного k-мерного симплекса и докажите, что оно реализуется как расстояние между центрами этих граней.

4.1.16. *Неравенство Буняковского-Коши-Шварца.*: докажите, что для любых векторов v и w евклидова линейного пространства выполнено неравенство $|(v,w)| \leqslant \|v\|\|w\|$, равенство в котором равносильно пропорциональности векторов. Выведите из этого известные неравенства:

(а) $\sum x_i^2 \sum y_i^2 \geqslant \left(\sum x_i y_i\right)^2$
для любых наборов чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

(б) $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \cdot \int\limits_0^1 g^2(x)dx \geqslant (\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx)^2$ для любых функций на $[0,1]$ с сумируемым квадратом.

4.2. Примеры евклидовых пространств.

4.2.17. Найдите ортогональный базис в подпространстве $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ стандартного координатного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

4.2.18. Найдите ортогональный базис в линейной оболочке векторов
$v_1=(1,2,2-1)^t$, $v_2=(1,1,-5,3)^t$, $v_3=(3,2,8,-7)^t$, в $\mathbb{R}^n$. и ортогональном дополнении к ней.

4.2.19. Найдите уравнения, задающие ортогональное дополнение к подпространству в стандартном $\mathbb{R}^4$, заданному уравнениями:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-2x_4=0 \\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0 \end{cases}$$

.

4.2.20. Докажите, что следующие четыре формулы определяют евклидовы скалярные произведения в $\mathbb{R}[x]$:

(а) $(P,Q)=\int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx;$

(б) $(P,Q)=\int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

(в) $(P,Q)=\int\limits_{0}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx;$

(г) $(P,Q)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx;$

Докажите также, что применяя в каждом из этих случаев процесс ортогонализации к стандартному базису $1, x, x^2, x^3, \ldots$, мы получим с точностью до постоянных множителей следующие семейства многочленов соответственно:

(д) многочлены Лежандра: $P_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n];$

(е) многочлены Чебышева: $T_n(x)=\cos(n\arccos x);$

(ж) многочлены Лаггера: $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^n\right];$

(з) многочлены Эрмита: $T_n(x)=e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2};$

(Указание: можно провести непосредственно ортоганализацию, а можно убедиться в том, что в ответе и в самом деле стоит набор ортогональных многочленов, причем линейная оболочка любых первых k элементов совпадает с линейной оболочкой набора $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$).

4.2.21. Вычислите длины приведенных выше специальных многочленов в соответствующих евклидовых структурах.

4.2.22. Найдите минимум $\int\limits_{-1}^{1} P^2(x)dx$ по всем многочленам P степени k со старшим коэффициентом 1.

4.2.23. В пространстве многочленов со скалярным произведением $(P, Q) = \int\limits_{0}^{1} P(x)Q(x)dx$ степени не выше k вычислите расстояние от нуля до подпространства многочленов степени k со старшим коэффициентом 1.

4.2.24. Докажите, что формула $(A, B) = \mathrm{tr}(A\bar{B}^t)$ орпеделяет евклидово скалярное произведение на пространстве вещественныых квадратных матриц и эрмитово скалярное произведение на пространстве комплексных квадратных матриц. Найдите ортогональное дополнение к подпространствам:

(а) матриц с нулевым следом;
(б) симметрических матриц;
(в) верхнетреугольных матриц;
(г) кососимметрических матриц.

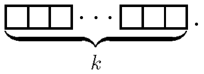
4.2.25. Докажите, что след матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, в котором она записывается.

4.2.26. Пусть поле K является конечномерным расширением поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим K как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, а элементы в K как линейные операторы из K в K, действующие умножением в поле K. Положим $(a, b) = \mathrm{tr}(ab)$. Докажите, что соответствие $a \mapsto \mathrm{tr}(a)$ является линейным функционалом на K, а произведение (a, b) — евклидовым скалярным произведением.

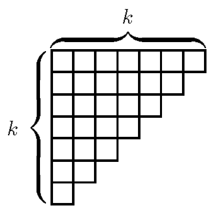
4.2.27. **(необязательная)**Докажите, что в условиях предыдущей задачи целые над $\mathbb{Z}$ элементы поля K составляют решетку конечного ранга, порождающую K как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

4.3. Объемы и определители Грама.

4.3.28. Нульмерная ступенчатая пирамида — это точка. Одномерная ступенчатая пирамида высоты k Π_k^1 — это:



Двумерная ступенчатая пирамида высоты k $\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1$ — это:



Аналогично n-мерная ступенчатая пирамида высоты k получается из k $(n-1)$-мерных ступенчатых пирамид убывающей высоты, поставленных в стопку вдоль n-той координатной оси: $\Pi_k^n = \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \cdots + \Pi_k^{n-1}$. Докажите, что на постройку n-мерной ступенчатой пирамиды высоты k уйдет C_{n+k-1}^n n-мерных кубиков. Выведите отсюда (с помощью предельного перехода), что объем параллелипипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, в $n!$ раз больше объема симплекса, натянутого на те же векторы.

4.3.29. Докажите, что k-мерный объем k-мерного симплекса равен произведению $(k-1)$-мерного объема какой-либо его грани на высоту, опущенную на эту грань.

4.3.30. Докажите, что объем симплекса равен $1/k$ произведения объема основания на высоту (k — как и выше — размерность).

4.3.31. Докажите, что объем параллелипипеда не превосходит произведения длин его ребер, выходящих из одной вершины.

Матрицей Грама системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется квадратная матрица, составленная из всевозможных их попарных произведений (v_i, v_j). Ее определитель называется *определителем Грама* и обозначается $\mathrm{G}\, v_1, v_2, \ldots, v_n = \det((v_i, v_j))$.

4.3.32. Докажите, что объем параллелипипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ равен $\sqrt{\mathrm{G}(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$.

4.3.33. Докажите, что расстояние d от конца вектора v до гиперплоскости, порожденной векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$, удовлетворяет соотношению:

$$d^2 = \frac{\mathrm{G}(v, e_1, \cdots, e_k)}{\mathrm{G}(e_1, e_2 \cdots, e_k)}.$$

4.3.34. Докажите, что $k+1$ точек $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k$ тогда и только тогда лежат на $k-1$-мерной сфере или гиперплоскости, когда обращается в нуль определитель

$$\Delta(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k) = \det(|P_i P_j|^2) \ ,$$

составленный из всевозможных квадратов расстояний между точками (его порядок равен $k+1$).

4.3.35. Докажите, что в предыдущей задаче точки тогда и только тогда лежат на $(k-1)$-мерной плоскости, когда обращается в нуль определитель $\Gamma(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k)$ порядка $k+2$, получающийся из $\Delta(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k)$ приписыванием сверху и слева единичной строки, единичного столбца и нуля в левом верхнем углу.

4.3.36. Докажите, что радиус шара, описанного вокруг симплекса с вершинами $P_0, P_1, \ldots, P_k$ вычисляется по формуле:

$$R^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k)}{\Gamma(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k)}.$$

4.4. Метрики и скалярные произведения. Евклидово скалярное произведение на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ индуцирует на аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ метрику по формуле: $\varrho(A, B) = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$ (проверьте, что аксиомы метрического пространства выполняются). Эта метрика, очевидно, инвариантна относительно сдвигов и однородна, то есть $\varrho(A, B) = |\lambda| \varrho(C, D)$, если $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{C, D}$.

Обратное неверно: не всякая однородная, инвариантная относительно сдвигов метрика происходит из некоторого евклидова скалярного произведения.

4.4.37. Докажите, что в евклидовом пространстве сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин четырех его сторон.

4.4.38. Пусть в аффинном пространстве имеется инвариантная относительно сдвигов однородная метрика ϱ. Определим на ассоциированном векторном пространстве *норму*: $\|\overrightarrow{v}\| = \varrho(A, A + \overrightarrow{v})$ (она не зависит от выбора точки A и обладает свойством $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$). Докажите, что ϱ тогда и только тогда индуцирована евклидовым скалярным произведением, когда для любых векторов $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ выполняется тождество параллелограмма: $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\| = 2(\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|)$.

(Указание: скалярное произведение, если оно есть, обязано задаваться формулой: $(v, w) = 1/2(\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|)$).

4.4.39. Пусть K — выпуклая фигура в $\mathbb{R}^n$, содержащая 0, не содержащая прямых и такая что $\bigcup\limits_{\lambda \geq 0} \lambda K = \mathbb{R}^n$. Для $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ положим $\|v\|_K = \inf\{\lambda |\, \lambda \geq 0, \overrightarrow{v} \in \lambda K\}$ и определим на $\mathbb{R}^n$ метрику по формуле: $\varrho_K(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_K$. Докажите, что при этом действительно получится метрика, однородная и инвариантная относительно сдвигов.

4.4.40. Приведите пример такой фигуры K, которой соответствует метрика, не индуцированная ни каким скалярным произведением. Каким фигурам отвечают метрики, индуцированные скалярными произведениями?

4.4.41. Пусть метрика ϱ на $\mathbb{R}^n$ индуцирована скалярным произведением. Рассмотрим ее как функцию $\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$.

Докажите, что она дифференцируема, и ее производная в точке (A, B) действует на касательный вектор $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ по формуле:

$$\varrho'(A, B)[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \frac{1}{\varrho(A, B)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}) =$$

$$= \|\overrightarrow{w}\| \cos(\varphi) - \|\overrightarrow{v}\| \cos(\psi),$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{w}$ и $\overrightarrow{AB}$, а ψ — между $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{AB}$.