тогда и только тогда имеет решение, когда $\mathrm{rk}A$ равен рангу расширенной матрицы системы, получающейся приписыванием к A справа столбца правых частей уравнений.

2.6.32. *Альтернатива Фредгольма.* Система линейных уравнений

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

с квадратной матрицей A (это означает, что число уравнений равно числу неизвестных) либо имеет единственное решение при любой правой части $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, либо имеет бесконечно много решений при нулевой правой части и эти возможности исключают друг друга. Докажите это и объясните, какая из возможностей реализуется при $\det A = 0$ и при $\det A \neq 0$?

§3. Аффинные пространства

3.1. Вводные задачи

3.1.1. Выведите из аксиом аффинного пространства, что для любых четырех точек P, Q, S, T условие $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QT}$ равносильно условию $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$.

3.1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}^t$ — две точки координатного пространства $\mathbb{R}^n$, рассматриваемого как аффинное пространство. Найдите координаты точки C, которая:
(а) делит отрезок $[AB]$ в отношении $k : m$, считая от A;
(б) такова, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

3.1.3. Пусть A, B, C, D, O — некоторые точки в n-мерном аффинном пространстве . При каких условиях на числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ точка $O + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}$ лежит:
а) на $[AB]$; б) в треугольнике ABC; в) в тетраэдре $ABCD$?
Как зависят эти условия от выбора точки O?

3.1.4. Напишите уравнение $(n-1)$-мерной гиперплоскости, пересекающей координатные оси n-мерного аффинного координатного пространства в точках с координатами $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}^t$.

3.1.5. *Центром тяжести* системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с весами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называется точка $O + (m_1 + m_2 + \cdots + m_k)^{-1} \sum m_i\overrightarrow{OA_i}$, где O — некоторая фиксированная "начальная" точка. Докажите, что это определение не зависит от выбора начальной точки.

3.1.6. Пусть G —некоторая подгруппа в группе всех аффинно-линейных преобразований аффинного пространства. Докажите, что если G имеет конечную орбиту, то G имеет и неподвижную точку (в частности, любая конечная группа имеет неподвижную точку).

3.2. Барицентрические координаты.

3.2.7. Пусть $O, A_1, A_2, \ldots, A_k$ —произвольные точки аффинного пространства, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — такие числа, что $\sum \lambda_i = 0$. Докажите, что вектор $\sum \lambda_i\overrightarrow{OA_i}$ из ассоциированного векторного пространства не зависит от точки O.

3.2.8. Докажите, что если в предыдущей задаче взять числа, удовлетворяющие условию $\sum \lambda_i = 1$, то точка $O + \sum \lambda_i\overrightarrow{OA_i}$ не будет зависеть от выбора точки O.

Обозначение. Точка из предыдущей задачи обозначается $\sum \lambda_i A_i$. Подчеркнем, что эта запись имеет смысл лишь при $\sum \lambda_i = 1$.

3.2.9. Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — набор из $(n+1)$ точек в n-мерном аффинном пространстве. Докажите, что n векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ тогда и только тогда составляют базис в ассоциированном векторном пространстве, когда любая точка P допускает и при том единственное представление в виде $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$; с $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.

Определение. В ситуации зад. 2.0.3 точки $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *аффинным базисом* аффинного пространства, а числа λ_i, соответствующие точке P, *барицентрическими координатами* этой точки.

3.2.10. В условиях зад. 2.0.3 выясните, какие

(а) барицентрические координаты имеет центр тяжести точек A_i?

(б) веса нужно поставить в точки A_i, чтобы их центр тяжести оказался в точке P с данными барицентрическми координатами?

(в) барицентрические координаты будет иметь точка $A_0+\overrightarrow{v}$, где $\overrightarrow{v}$ — вектор, имеющий в векторном базисе $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ координаты $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^t$?

3.2.11. Пусть точки A, B, C составляют аффинный базис аффинной плоскости. Опишите ГМТ, барицентрические координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $\alpha, \beta, \gamma > 0$	б) $\alpha, \beta > 0,\ \gamma < 0$	в) $\alpha = \beta$
г) $\alpha, \beta > 1/3,\ \gamma > 0$	д) $\alpha \geqslant \beta$	е) $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

3.2.12. В условиях предыдущей задачи выпишите условия на барицентрические координаты, задающие треугольники:

(а) получающиеся из ABC гомотетиями относительно точки пересечения медиан с коэффициентами 3 и $1/3$;

(б) разрезаниями ABC по медианам (всего имеется 6 треугольников).

3.2.13. Будем называть *медианами* набора точек $P_1, P_2, \dots, P_k$ отрезки, соединяющие одну из этих точек с центром тяжести остальных. Докажите, что все медианы пересекаются в одной точке.

3.3. Выпуклость. Подмножество M точек аффинного пространства называется *выпуклым*, если с любыми двумя точками $A, B \in M$ оно содержит и соединяющий их отрезок $[A, B] = \{P = \alpha A + \beta B | \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1\}$. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество точек M называется *выпуклой оболочкой* множества M и обозначается $\langle M \rangle_{\text{вып}}$. Это наименьшеевыпуклое множество, содержащее M.

3.3.14. Докажите, что:

(а) выпуклая оболочка множества M состоит из всевозможных точек:

$$P = \sum \lambda_i M_i \quad \text{с} \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum \lambda_i = 1 \quad \text{и} \quad M_i \in M$$

.

(б) для произвольной точки P $\qquad \langle P \cup M \rangle_{\text{вып}} = \bigcup\limits_{Q \in \langle M \rangle_{\text{вып}}} [PQ].$

(в) выпуклая оболочка набора точек, порождающих k-мерное аффинное подпространство, является объединением всех k-мерных симплексов с вершинами в этих точках.

3.3.15. Докажите, что выпуклая оболочка компакта — компакт (базисом открытых множеств в аффинном пространстве здесь и далее мы считаем открытые параллелипипеды).

3.3.16. Пусть K — замкнутое выпуклое множество, P — точка. Докажите, что:

(а) если $P \notin K$, то существует гиперплоскость, разделяющая P и K (то есть P и K находятся по отношению к ней в разных открытых полупространствах);

(б) если P лежит на границе K, то существует проходящая через P гиперплоскость, относительно которой K лежит в одном замкнутом полупространстве (так называемая *опорная гиперплоскость*.

3.3.17. Докажите, что всякое выпуклое множество является пересечением семейства полупространств, а если множество является выпуклой оболочкой конечного набора точек, то — конечного семейства полупространств (то сеть выпуклым многогранником).

3.4. n-мерные куб и кокуб.

Прежде чем приступать к решению задач этого цикла, придумайте определение n-мерного единичного куба в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$, обобщающее представление о квадрате с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1). Такой n-мерный куб мы будем называть *стандартным*.

3.4.18. Сколько вершин и k-мерных граней у стандартного n-мерного куба?

3.4.19. Сколько внутренних (то есть не лежащих в грани) диагоналей выходит из одной вершины и сколько всего внутренних и вообще диагоналей у n-мерного куба?

3.4.20. Нарисуйте какую-либо 2-мерную проекцию 4-мерного стандартного куба и какую-либо его 3-мерную "развертку поверхности" с указаниями, как ее склеивать.

3.4.21. Опишите семейство трехмерных многогранников, получающихся в сечении стандартного 4-мерного куба семейством гиперплоскостей, параллельных плоскости $x^1+x^2+x^3+x^4=0$ и проходящих через точки $O+t\overrightarrow{v}$, где $\overrightarrow{v}=(1,1,\dots,1)^t$, а t пробегает отрезок $[0,1]$.

Определение. *n-мерным кокубом* называется выпуклая оболочка центров $(n-1)$-мерных граней n-мерного куба. В частности 3-мерный кокуб — это октаэдр. *Стандартным кокубом* называется выпуклая оболочка $2n$ точек: концов векторов координатного репера и противоположных им.

3.4.22. Убедитесь, сто стандартный кокуб — это кокуб (то есть укажите куб, из которого он построен) и определите сколько у него k-мерных граней, $k=0,1,2,...,n$.

3.4.23. В каком отношении делит центр тяжести набора точек, состоящего из данной вершины и всех вершин, соединенных с ней 1-мерным ребром, ту внутреннюю диагональ из данной вершины, на которую он попадает:
а) для n-мерного куба б) для n-мерного кокуба?

3.4.24. Установите взаимно-однозначное соответствие между k-мерными гранями куба и $(n-k)$-мерными гранями кокуба; и придайте точный смысл фразе: "кокуб в $\mathbb{R}^n$ — это тоже самое, что куб в $(\mathbb{R}^n)^*$".

3.5. Симплекс. Невырожденным k-мерным *симплексом* называется выпуклая оболочка $k+1$ точек $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$, для которых векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ линейно независимы (это равносильно более симметричному условию: точки не содержатся ни в каком $(k-1)$-мерном подпространстве). Если последнее условие не выполняется, симплекс называется *вырожденным*. *Стандартным k-мерным симплексом* называется выпуклая оболочка $(k+1)$ точек —- концов базисных векторов координатного репера в $\mathbb{R}^{k+1}$.

3.5.25. Сколько k-мерных граней у стандартного n-мерного симплекса?

3.5.26. Разрежьте стандартный n-мерный куб на $k!$ симплексов (не стандартных, разумеется).

3.5.27. Барицентрическое подразделение симплекса обощает процедуру разбиения треугольника на 6 треугольников медианами, и состоит в переходе к меньшим симплексам, 1-мерные ребра которых — это отрезки, соединяющие центры тяжести граней и самого симплекса с вершинами и с центрами тяжести граней меньших размерностей (дайте самостоятельно точное индуктивное определение). На сколько симплексов разделится k-мерный симплекс при барицентрическом разбиении?

3.5.28. Рассмотрите сечения стандартного: а) трехмерного б) четырехмерного симплекса семействами плоскостей:
а) $x^1 = const$; б) $x^1 + x^2 = const$. Определите, что это за фигуры и вычислите их метрические параметры: длины сторон, площади граней, объемы и т.п. (Относительно стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^n$).

3.6. Теорема Хелли. Пусть дан набор выпуклых фигур $K_1, K_2, \ldots, K_m$ в n-мерном аффинном пространстве с $n < m$. Теорема Хелли утверждает, что если любые $n+1$ из этих фигур имеют общую точку, то все m фигур имеют общую точку.

3.6.29. Приведите примеры, демонстрирующие, что условие выпуклости нельзя отбросить, а число $n+1$ нельзя уменьшить.

3.6.30. Докажите теорему Хелли для $m = n+2$. (Указание: для разгона рассмотрите сначала случай $n = 2$. Возьмите выпуклую оболочку набора из $n+2$ точек, являющихся общими для всевозможных сочетаний из $n+1$ фигур, и постройте, исходя из нее точку, принадлежащую всем $n+2$ фигурам. При этом возможны два случая: все $n+2$ точки являются вершинами выпуклой оболочки, или одна из них лежит в выпуклой оболочки остальных.)

3.6.31. Докажите теорему Хелли в общем случае. (Указание: по индукции можно считать, что любые $m-1$ фигур имеют общую точку и повторить предыдущее рассуждение. Опять же полезно сначала разобрать случаи малых размерностей $n = 2, 3$!)

3.6.32. Докажите, что любое покрытие k-мерного аффинного пространства полупространствами содержит подпокрытие, состоящее из $k+1$ полупространства.

3.6.33. Докажите, что любое пятно на скатерти, диаметр которого (то есть максимальное расстояние между точками пятна) не более 1, покрывается блюдцем радиуса $1/\sqrt{3}$. Как это обобщить на высшие размерности? (Этот сюжет называется теоремой Юнга).

3.6.34. Докажите, что теорема Хелли остается в силе для бесконечного набора, но *компактных* выпуклых фигур, и убедитесь, что условие компактности всех фигур существенно.