Лекция 8
Проективные пространства

▷Проективизация векторного пространства ▷Однородные координаты и аффинные карты ▷Подпространства и проективная двойственность ▷Группа $PGL_n(k)$ ▷Проективные квадрики ▷Пересечение квадрики и прямой ▷Касательное пространство к квадрике ▷Геометрия проективных квадрик ▷Планарность и линейчатость ▷Аффинные квадрики ▷Полярные соответствия ▷Линейные системы квадрик и поляритетов

§1. Основные понятия

Как мы уже отмечали, в линейной алгебре есть два способа связать с векторным пространством V точечное геометрическое пространство. Переход к аффинному пространству $\mathrm{Aff}(V)$, точками которого служат концы векторов из V, мы ужже рассмотрели. В этой лекции мы обсудим *проективное пространство* $\mathbb{P}(V)$.

1.1. Определение. *Проективизацией векторного пространства V называется множество $\mathbb{P}(V)$, точками которого являются классы пропорциональных ненулевых векторов из V (т.е. всевозможные прямые в $\mathrm{Aff}(V)$, проходящие через нуль).*

Таким образом, каждый ненулевой вектор $v \in V$ определяет точку в $\mathbb{P}(V)$, которую мы будем обозначать $\langle v\rangle$. Равенство $\langle v\rangle = \langle w\rangle$ в $\mathbb{P}(V)$ равносильно тому, что $v = \lambda w$ в V для некоторого $\lambda \neq 0$.

Если $\dim V = n + 1$, то число n называется *размерностью* проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, так что $\dim \mathbb{P}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - 1$. Проективизация координатного пространства k^{n+1} называется *n-мерным проективным пространством над k* и обозначается через $\mathbb{P}_n$ или $\mathbb{P}_n(k)$.

1.2. Аффинные карты. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(V)$ $(n + 1)$-мерного векторного пространства V. В данном выше определении точки $\mathbb{P}(V)$ выглядят, скорее, как линии, по которым происходит центральное проектирование из нуля. Для того, чтобы наблюдать их как настоящие точки, мы должны поместить в $\mathrm{Aff}(V)$ экран — n-мерную гиперплоскость U в $\mathrm{Aff}(V)$, не проходящую через нуль. Тогда каждая линия $\langle v\rangle$, пересекающая U, изобразится в U настоящей аффинной геометрической точкой. (см. рис. 8–A). Такая гиперплоскость U называется *аффинной картой* на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$. Ясно, что всякая точка $\langle v\rangle \in \mathbb{P}(V)$ может быть изображена вместе со всеми близкими точками в некоторой аффинной карте.

Однако, ни одна аффинная карта U не покрывает всё $\mathbb{P}(V)$ целиком — вне U остаются все точки $\langle v\rangle$, лежащие в параллельном U n-мерном *векторном* подпространстве $U_\infty \in V$. Такие точки сами составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство. Оно называется *бесконечно-удалённой* по отношению к аффинной карте U *проективной гиперплоскостью* . Следовательно, теоретико-множественно $\mathbb{P}_n$ представляется в виде *дизъюнктного* объединения[1] $\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1}$. Итерируя эту процедуру и учитывая, что $\mathbb{P}_0 =$ одна точка $= \mathbb{A}^0$, получим:

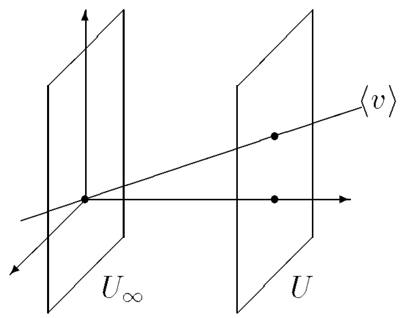

Рис. 8–А. Аффинная карта.

1.2.1. Утверждение. *Теоретико-множественно $\mathbb{P}_n$ разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств*

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

Задача 8.1. Получите из такого разложения над полем из q элементов геометрическое доказательство формулы для суммирования геометрической прогрессии.

1.3. Пример: проективные прямые. Проективная прямая распадается в объединение аффинной карты $\mathbb{A}^1$ и бесконечно-удалённой точки ∞ (см. рис. 8–Б, рис. 8–В). В вещественном случае из такого представления видно, что вещественная проективная прямая как топологическое пространство гомеоморфна окружности: $\mathbb{RP}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ (рис. 8–В). Гомеоморфизм задаётся стереографической проекцией из точки ∞. Интуиция "стремления к бесконечности" в вещественном анализе основывается именно на этой картинке.

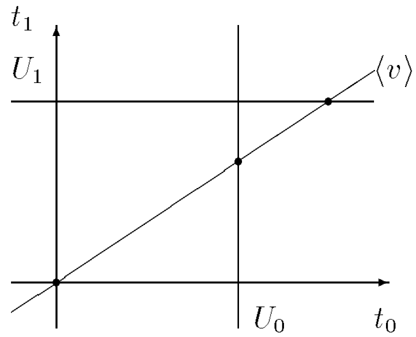

Рис. 8–Б. Проективная прямая.

В общем случае $\mathbb{P}_1(k)$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных карт U_0 и U_1 по плотному открытому подмножеству, являющемуся дополнением до точки. Действительно, фиксируем в k^2 стандартный базис и обозначим через t_0, t_1 координаты относительно этого базиса (см. рис. 8–Б). Тогда $\mathbb{P}_1(k)$ накрывается двумя аффинными картами $U_0 = \{t_0 = 1\}$ и $U_1 = \{t_1 = 1\}$. В первую карту попадают все точки $\langle v\rangle \in \mathbb{P}_1$, $v = (t_0, t_1)$, у которых $t_0 \neq 0$, во вторую — с $t_1 \neq 0$.

Выберем в качестве аффинной координаты на U_1 функционал $x = t_1$, а на U_1 — функционал $y = t_0$. Тогда $\mathbb{P}_1$ получается склеиванием подмножества $\{x \neq 0\}$ на U_0 с подмножеством $\{y \neq 0\}$ на U_1 по правилу: точка $x \in U_0$ склеивается с точкой $y = 1/x$ (поскольку $\langle v\rangle = \langle (t_0, t_1)\rangle \in U_0 \cap U_1$ изображается в U_0 точкой $x = t_1/t_0$, а в U_1 точкой $y = t_0/t_1$). Из этого следует, например, что комплексная проективная прямая $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ не только топологически, но и *аналитически* изоморфна двумерной сфере S^2, которую тоже можно

[1]т.е. объединения непересекающихся кусков, что изображается значком: $\sqcup$

представить как результат склейки двух аффинных карт — касательных плоскостей в северном и южном полюсах, переносимых на сферу при помощи стереографической проекции из противоположного полюса (см. рис. 8–Г).

карта $U_1 \sim S^1 \setminus \infty$

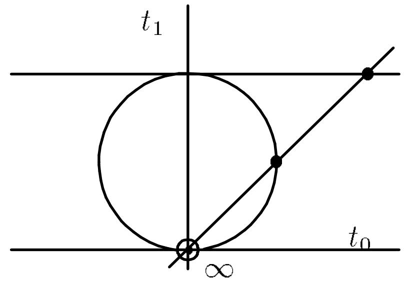

Рис. 8–В. Проективная прямая $\mathbb{RP}_1$.

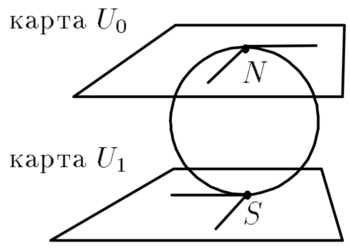

Рис. 8–Г. Проективная прямая $\mathbb{CP}_1$.

Задача 8.2. Докажите, что комплексные координаты $w \in U_0$ и $z \in U_1$ стереографических проекций одной и той же точки $p \in S_2$ на рис. 8–Г связаны соотношением $z = 1/w$, при условии, что диаметр сферы равен 1, а комплексная структура на U_0 и U_1 задаётся выбором координат, указанным на рисунке рис. 8–Г.

Задача 8.3. Убедитесь, что $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ являются вещественным и комплексно-аналитическим многообразием.

1.4. Координаты. Имеются два способа вводить координаты на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Первый способ — фиксировать в V базис $e_0, \dots, e_n$ и рассмотреть в V координаты $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ относительно этого базиса[2].

Если $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ и $v = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$, то набор чисел $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ называется *однородными координатами* точки $\langle v \rangle$. Название связано с тем, что набор координат определяется по точке *не однозначно*, а с точностью до пропорциональности, так что точка характеризуется, собственно, не набором чисел $t_0, t_1, \dots, t_n$, а набором *отношений* $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$ между ними. Поэтому однородные координаты, как правило, и записывают как набор отношений

$$v = (t_0 : t_1 : \dots : t_n).$$

При работе с однородными координатами важно помнить, что геометрический смысл будут иметь лишь выражения, однородные по этим координатам. Например, уравнение $P(t) = 0$, где P — однородный многочлен степени k, корректно задаёт поверхность в $\mathbb{P}_n$, поскольку при умножении всех координат на константу, эта константа выносится из P, что не нарушает равенства: $P(t) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda t) = \lambda^k P(t) = 0$. Напротив, *неоднородный* многочлен никакой геометрической фигуры в $\mathbb{P}_n$ *не определяет*.

Второй способ состоит в том, чтобы выбрать в окрестности данной точки аффинную карту, ввести на ней аффинные координаты и использовать их для записи точек. Достоинство этого способа в том, что точка будет определять свои координаты уже однозначно, а результаты вычислений в таких координатах можно изображать в аффинном пространстве. Недостаток — в том, что не все точки $\mathbb{P}_n$ будут охвачены такими координатами, что не

[2]В отличие от линейной алгебры, в проективной геометрии координаты, как и векторы, всегда нумеруют нижними индексами, дабы не путать их с показателями степеней. Мы тоже будем следовать этой традиции.

позволяет увидеть всю полноту проективно-геометрической картины и сводит на нет все её преимущества перед аффинной.

1.5. Функции перехода. Одну и ту же точку в $\mathbb{P}_n$ можно изображать сразу в нескольких картах. В связи с этим возникает задача о пересчёте выписанных в различных аффинных картах координат одной и той же точки $\langle v\rangle \in \mathbb{P}_n$ друг в друга. Функции, выражающие аффинные координаты одной карты через аффинные координаты другой карты, называются *функциями перехода*. Рассмотрим наиболее часто встречающийся пример.

Пусть в V фиксированы координаты $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Покрытие $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинными картами $U_i = \{t_i = 1\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ называется *стандартным*. В карте U_i изображаются те и только те $\langle v\rangle \in \mathbb{P}_n$, $v = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$, у которых $t_i \neq 0$. В качестве аффинных координат в U_i выбираются n функционалов $x_\nu = t_\nu$ с $\nu \neq i$. Точка $\langle v\rangle$ с $v = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ имеет в U_i аффинные координаты $x_\nu = t_\nu / t_i$ $(\nu \neq i)$.

Если U_j — другая аффинная карта (с $j \neq i$), и аффинные координаты в U_j обозначены через $y_\mu = t_\mu / t_j$ $(\mu \neq j)$, то координаты y_μ точки $\langle v\rangle \in U_j \cap U_i$ выражаются через координаты x_ν той же точки на U_i по формулам:

$$\begin{cases} y_\mu = x_\mu \big/ x_j & \text{при } \mu \neq i, j \\ y_i = 1 \big/ x_j \end{cases}$$

а само пересечение $U_i \cap U_j$ внутри U_i выделяется условием $\{x_j \neq 0\}$ а внутри U_j — условием $\{y_i \neq 0\}$.

1.6. Проективное замыкание. Весьма эффективный способ анализа геометрических задач состоит в том, чтобы поместить рассматриваемое аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве карты U_0 в проективное пространство $\mathbb{P}_n$ и рассмотреть *замыкание* получающихся фигур (ибо U_0 открыто в $\mathbb{P}_n$). На языке формул это означает подстановку $x_i = t_i / t_0$ с последующим умножением на общий знаменатель (что и означает отказ от условия $t_0 \neq 0$).

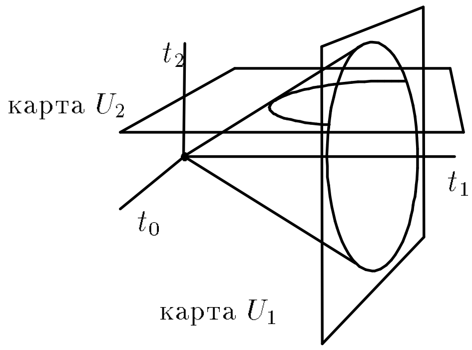

Рис. 8–Д. Плоские коники.

1.6.1. Пример. Проективное замыкание окружности $x^2 + y^2 = 1$ задаётся в аффинных координатах $(t_0 : t_1 : t_2)$ на $\mathbb{P}_2$ уравнением

$$t_1^2 + t_2^2 - t_0^2 = 0$$

(мы подставили $x = t_1/t_0$, $y = t_2/t_0$ и привели к общему знаменателю). Это уравнение в подлежащем трёхмерном векторном пространстве определяет конус (см. рис. 8–Д. В аффинной карте $U_2 = \{t_2 = 1\}$ с координатами $u = t_0/t_2$, $w = t_1/t_2$ эта фигура запишется уравнением

$$w^2 - u^2 = 1$$

и будет выглядеть как гипербола (см. рис. 8–Д).

1.6.2. Пример. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — набор из $n+1$ аффинно-независимых точек в $\mathbb{A}^n$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в качестве аффинной карты в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и выберем в качестве базиса в V $n+1$ векторов, концы которых попадут в точки $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Тогда однородные координаты $(t_0 : t_1 : \cdots : t_n)$ в этом базисе будут ни чем иным, как *барицентрическими координатами* в $\mathbb{A}^n$ относительно точек $p_0, p_1, \ldots, p_n$ $\mathbb{A}^n$. Сама аффинная карта $\mathbb{A}^n$ будет в этих координатах задаваться уравнением $\sum t_i = 1$ и отказ от этого условия (с сохранением единственного требования: чтобы все t_i не обращались одновременно в нуль) и будет означать переход к проективному замыканию $\mathbb{A}^n$. Уходу на бесконечность соответствует такое движение, при котором $\sum t_\nu \longrightarrow 0$.

Задача 8.4. Укажите аффинную карту и координаты на ней, где рассматриваемая кривая изобразится параболой.

§2. Проективные подпространства и проективные преобразования.

2.1. Подпространства. *Проективным k-мерным подпространством* в n-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называется проективизация $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(V)$ любого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $L \subset V$. Эквивалентно можно было бы сказать, что k-мерное проективное подпространство — это фигура, которая изображается k-мерной плоскостью в каждой аффинной карте. Число $n-k$ называется *коразмерностью* подпространства. Отметим, что коразмерность проективного подпространства совпадает с коразмерностью векторного подпространства, проективизацией которого оно является:

$$\operatorname{codim}_V(L) = \dim V - \dim L = (n+1) - (k+1) = n - k = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}(V)}\mathbb{P}(L)$$

Из этого вытекает

2.1.1. Лемма. *Коразмерность пересечения проективных подпространств не превышает суммы коразмерностей самих пересекаемых подпространств. В частности, k-мерное подпространство всегда имеет непустое пересечение с $n-k$-мерным.*

Например, любые две прямые на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ пересекаются. Это позволяет описать $\mathbb{P}^2$ как объединение аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ и бесконечно удалённой прямой $\mathbb{P}^1$, точки которой взаимно-однозначно соответствуют всевозможным пучкам параллельных прямых на $\mathbb{A}^2$ и являются бесконечно-удалёнными точками пересечения всех прямых пучка.

2.1.2. Дополнительные подпространства. Если пространство V разложено в прямую сумму $V = U \oplus W$ и $\dim V = n+1, \dim U = k+1, \dim W = n-k$, то $H_U = \mathbb{P}(U)$ и $H_W = \mathbb{P}(W)$ будут *непересекающимися* проективными подпространствами размерностей k и $(n-k-1)$ соответственно. Обратно, всякие непересекающиеся k- и $(n-k-1)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ отвечают некоторому разложению V в прямую сумму. Такие подпространства называются *дополнительными*.

2.1.3. Проектирование. Пусть $V = U \oplus W$ и $H_U = \mathbb{P}(U)$, $H_W = \mathbb{P}(W)$, как и выше. Существование и единственность представления произвольного вектора $v \in V$ в виде $v = u+w$ с $u \in U, w \in W$ означает геометрически, что через каждую точку $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ *проходит единственная прямая* $\langle u, w \rangle$, пересекающая подпространства H_U и H_W.

Линейный оператор проектирования V на W вдоль U, отображающий $v = u + w$ в w, индуцирует отображение

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W),$$

переводящее $\langle v \rangle$ в $\langle w \rangle$ (правило корректно, т.к. $\lambda v = \lambda u + \lambda w$ и *всякий* вектор из класса $\langle v \rangle$ переходит в вектор из класса $\langle w \rangle$). Это отображение называется *проектированием* $\mathbb{P}_n$ *на* H_W *с центром в* H_U. Оно переводит произвольную точку $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ в точку пересечения с H_W той единственной прямой, которая проходит через $\langle v \rangle$ и пересекает и H_U и H_W.

2.2. Проективные операторы. Проектирование является частным случаем *линейного проективного преобразования*, или, как говаривали в старину, *коллинеации*. По определению, таковым является всякое отображение

$$F: \ \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V),$$

индуцированное *ненулевым линейным оператором* $F: \ V \longrightarrow V$ по правилу

$$F(\langle v \rangle) = \langle Fv \rangle$$

Задача 8.5. Убедитесь, что это правило корректно.

2.2.1. Лемма. *Пусть ненулевые операторы F и G задают одно и то же линейное проективное преобразование в $\mathbb{P}(V)$. Если образ этого преобразование отличен от точки, то $F = \lambda G$ для некоторого $0 \neq \lambda \in k$, т.е. $\langle F \rangle = \langle G \rangle$ в $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, V))$.*

Доказательство. Предположим, что F и G не пропорциональны, имеют по меньшей мере двумерный образ, и действие F и G в $\mathbb{P}(V)$ совпадает. Тогда $\dim V \geqslant 2$, и умножая G на константу, мы можем считать, что в V найдутся два линейно-независимых вектора e_1 и e_2, такие, что

$$F(e_1) = G(e_1) = v_1\,, \ F(e_2) = v_2\,, \ G(e_2) = \lambda v_2,$$

причём v_1 и v_2 линейно-независимы и $\lambda \neq 1$. Но тогда

$$F(\langle e_1 + e_2 \rangle) = \langle v_1 + v_2 \rangle \neq \langle v_1 + \lambda v_2 \rangle = G(\langle e_1 + e_2 \rangle).$$

Противоречие.

Обратимые линейные проективные преобразования индуцируются в точности обратимыми линейными операторами и называются *проективными автоморфизмами*. Они составляют группу относительно умножения, которая обозначается $\mathbb{P}GL(V)$ и называется *проективной линейной группой*. В частности, группа классов пропорциональных невырожденных матриц $\mathbb{P}GL_n(k) = \mathbb{P}GL(k^n)$ представляет собой не что иное, как группу обратимых линейных замен однородных координат в $\mathbb{P}_n$.

Фиксация однородных координат в $\mathbb{P}(V)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{P}GL(V) \longrightarrow \mathbb{P}GL_n(k)$.

2.2.2. Пример. Группа $\mathbb{P}GL_2(k)$ изоморфна группе дробно линейных преобразований аффинной прямой $\mathbb{A}^1(k)$. Действительно, вкладывая $\mathbb{A}^1$ в $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(t_0 : t_1)$ в качестве стандартной аффинной карты $U_1 = \{t_1 = 1\}$ с аффинной координатой $x = t_0/t_1$, мы можем записывать всякий оператор

$$F: \ \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

в виде дробно-линейной замены аффинной координаты:

$$F:\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

(при этом очевидно, что два оператора совпадают как дробно-линейные функции тогда и только тогда, когда они пропорциональны). В частности, композицию дробно-линейных отображений можно вычислять, перемножая матрицы.

Задача 8.6. Убедитесь, что существует и единственна дробно-линейная функция, переводящая 3 (произвольные) данные точки в три другие (произвольные) заданные точки.

Задача 8.7. Пусть $(x:y)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}_1$. *Двойным отношением* упорядоченной четвёрки точеек $\{P_1,P_2,P_3,P_4\}\subset\mathbb{P}_1$ с координатами $P_i=(x_i,y_i)$ называется величина

$$(P_1,P_2,P_3,P_4)=\frac{(x_1y_3-y_1x_3)/(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_1y_4-y_1x_4)/(x_2y_4-y_2x_4)}$$

Докажите, что точка P_4 тогда и только тогда переходит в точку Q_4 при коллинеации,переводящей P_1,P_2,P_3 в Q_1,Q_2,Q_3 соответственно, когда

$$(P_1,P_2,P_3,P_4)=(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$$

Из этой задачи вытекает, что *двойное отношение* не изменяется при проективных автоморфизмах прямой. Более того, поскольку при проективном преобразовании $\mathbb{P}_n$ четыре точки, лежащие на одной прямой, переходят в четыре точки, лежащие на одной прямой, двойное отношение точек образов должно быть равно двойному отношению точек-прообразов (ибо при ограничении на прямую индуцируется проективное преобразование из одной прямой в другую, а такое преобразование однозначно определяется заданием образов трёх точек). Тем самым, двойное отношение является *геометрической характеристикой* четырёх точек, лежащих на прямой (т.е. не зависит от выбора системы координат). В случае, когда $(a,b,c,d)=-1$, точки a и b называются *ангармоничными* точкам c и d.

2.3. Проективная двойственность. Поскольку два линейных функционала $\alpha,\beta\in V^*$ тогда и только тогда пропорциональны, когда их множеством нулей является одна и та же гиперплоскость $L\subset V$, точки проективного пространства $\mathbb{P}(V^*)$ взаимно-однозначно соответствуют проективным гиперплоскостям в $\mathbb{P}(V)$.

Если $\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$, то $\mathbb{P}(V^*)$ называется *двойственным* проективным пространством и обозначается $\mathbb{P}_n^\vee$. Двойственность между линейными подпространствами

$$V\supset U\longleftrightarrow \mathrm{Ann}U\subset V^*$$

индуцирует двойственность между проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\vee$, при которой k-мерным плоскостям в $\mathbb{P}_n$ взаимно-однозначно соответствуют $n-k$-мерные плоскости в $\mathbb{P}_n^\vee$, и соответственные плоскости являются проективизациями аннуляторов друг друга.

Эта двойственность обращает включения и переводит пересечения в *линейные оболочки* (линейной оболочкой множества $M\subset\mathbb{P}_n$ называется пересечение всех проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$, содержащих M).

Задача 8.8. Докажмите, что линейная оболочка произвольного множества точек $M\subset\mathbb{P}_n$ проективно двойственна аннулятору этого множества $\mathrm{Ann}\,M\subset\mathbb{P}_n^\vee$.

§3. Проективные квадрики.

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что характеристика основного поля k отлична от 2.

3.1. Определение. *Подмножество $Q \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, являющееся множжеством нулей какого-либо ненулевого однородного многочлена $q(V)$ степени 2 от координат на V, называется проективной квадрикой*

Однородные многочлены второй степени от координат на V называются *квадратичными формами*. При линейной однородной замене координат квадратичная форма остаётся квадратичной формой, а $q(v) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) = 0$. Поэтому определениее проективной квадрики корректно, и свойство фигуры $Q \subset \mathbb{P}_n$ быть квадрикой не зависит от выбора координат.

> Задача 8.9. Убедитесь, что для того, чтобы $q(t) \in k[t_0, t_1, \dots, t_n]$ был квадратичной формой необходимо и достаточно, чтобы в $k[\lambda, t_0, t_1, \dots, t_n]$ выполнялось равенство $q(\lambda t_0, \lambda t_1, \dots, \lambda t_n) = \lambda^2 q(t_0, t_1, \dots, t_n)$.

В прошлой лекции мы построили довольно подробную алгебраическую теорию квадратичных форм. Сейчас мы выясним геометрический смысл этой теории.

При этом, как и на прошлой лекции, мы будем свободно пользоваться тем, что задание квадратичной формы $q(v)$ на V равносильно заданию на V симметричной билинейной формы

$$B_q(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

называемой *поляризацией* квадратичной формы q. Так, значение q на векторе v можно вычислять в координатах по формуле

$$q(v) = (v)^t G(v) = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} g_{\mu\nu} t_\mu t_\nu$$

где $(v) = (t_\mu)$ — столбец координат вектора v, а $G = (g_{\mu\nu}) = (B_q(e_\mu, e_\nu))$ — симметрическая матрица Грама поляризации B_q формы q.

3.2. Взаимодействие квадрики и прямой. Пусть прямая $l = \mathbb{P}(L) \subset \mathbb{P}(V)$ является проективизацией линейной оболочки векторов u и v (т.е. проходит через точки $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$). Пересечение $l \cap Q$ задаётся в $\mathbb{P}(L)$ ограничением формы B_q на подпространство L и целиком определяется матрицей Грама

$$G_L = \begin{pmatrix} B_q(u,u) & B_q(u,v) \\ B_q(u,v) & B_q(v,v) \end{pmatrix}$$

По теореме Лагранжа в L можно выбрать другой базис $(e_1, e_2) = (u, v) \cdot C$ (где $C = GL_2(k)$) в котором матрица Грама будет иметь вид

$$G'_L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{где} \quad ab = \det G_L \cdot \det{}^2 C.$$

Возможны 4 случая:

3.2.1. G_L невырождена и $-\det G_L$ не квадрат в k. Тогда $ab \neq 0$ и форма $at_0^2 + bt_1^2$ анизотропна, ибо уравнение $at_0^2 + bt_1^2 = 0$ равносильно тому, что

$$\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^2 = -ab \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

Правая часть здесь по модулю квадратоа в k есть $-\det G_L$.

Следовательно, *в этом случае пересечение пусто*: $l \cap Q = \emptyset$.

3.2.2. G_L невырождена и $-\det G_L$ квадрат в k. В этом случае и $(-ab)$, а значит и $\left(-\frac{b}{a}\right)$ будут квадратами в k.

Следовательно, в этом случае $l \cap Q$ *состоит из двух различных точек*

$$(t_0 : t_1) = (\pm\sqrt{\frac{b}{a}} : 1)$$

3.2.3. G_L вырождена, но отлична от нуля. В этом случае $b = 0$, но $a \neq 0$ и ограничение Q на L является полным квадратом $at_0^2 = 0$, а стало быть имеет *единственный нуль* $(0 : 1)$ *кратности* 2. В этом случае говорят, что *прямая l касается Q в этой единственной точке.*

3.2.4. $G_L \equiv 0$. В этом случае L изотропно и $l \subset Q$.

Итак, мы доказали

3.2.5. Утверждение. *Прямая l либо не пересекается с квадрикой, либо лежит на ней, либо пересекает её в двух различных точках, либо касается её в единственной точке. Эти возможности попарно исключают друг друга и других возможностей нет.*

3.2.6. Следствие. *Если прямая имеет с квадрикой три различных общих точки, то она лежит на этой квадрике целиком.*

3.3. Определение. *Прямая называется касательной к квадрике, если она либо лежит на ней, либо касается её в одной точке.*

3.4. Теорема. *Множество всех прямых, касательных к квадрике*

$$Q = \{(w) \in \mathbb{P}(V) \mid B_q(w, w) = 0\}$$

и проходящих через данную точку $p = \langle v \rangle \in Q$, заметает проективное подпространство в $\mathbb{P}(V)$ коразмерности $\leqslant 1$, совпадающее с

$$\{\langle u \rangle \in \mathbb{P}(U) \mid B_q(u, v) = 0\} = \mathrm{Ann}_{\varrho B}(v)$$

Обозначение. Это подпространство обозначается T_pQ или T_VQ и называется *касательным пространством к квадрике Q в точке p.*

Доказательство. Пусть $q = \langle u \rangle$. Как мы видели, прямая (p, q) (где $p = \langle v \rangle \in Q$) касается Q в точке p или лежит на Q если и только если матрица Грама

$$\begin{pmatrix} B(u,u) & B(u,v) \\ B(u,v) & 0 \end{pmatrix}$$

вырождена. Это равносильно условию $B(u,v)=0$, что и утверждалось.

3.5. Простые и особые точки. Точка $p=\langle v\rangle\in Q$ называется *простой*, если $T_pQ\neq\mathbb{P}(V)$, т.е. является настоящей гиперплоскостью коразмерности 1. Это равносильно тому, что $\varrho_B(v)\neq 0$ в V^*, т.е. что v не лежит в ядре формы B.

Точки $s=\langle w\rangle$, в которых $T_sQ=\mathbb{P}(V)$, т. е. совпадает со всем пространством, называются *особыми*. Множество особых точек обозначается

$$\mathrm{Sing}Q=\{s=\langle w\rangle\in Q\mid\varrho_B(w)=0\}$$

и совпадает с проективизацией ядра формы $B:\ \mathrm{Sing}Q=\mathbb{P}(\ker B)$

Квадрика называется *неособой* или *невырожденной*, если $\mathrm{Sing}Q=\emptyset$. Подчеркнём, что пустая квадрика неособа, и особая квадрика всегда непуста.

Подпространство $\mathrm{Sing}Q\subset Q$ может быть геометрически охарактеризовано также как *геометрическое место точек* s, *таких, что* $\forall q\in Q$ *прямая* $(sq)\subset Q$. Действительно, это условие в точности равносильно тому, что всякая прямая в $\mathbb{P}(V)$, содержащая s, является касательной к квадрике (т.е. равенству $T_sQ=\mathbb{P}(V)$).

3.6. Теорема. *Любое подпространство $H\subset\mathbb{P}(V)$, дополнительное к подпространству $\mathrm{Sing}Q$, пересекает Q по невырожденной (возможно, – пустой) квадрике $Q'=H\cap Q$, так что квадрика Q есть объединение всех прямых, проходящих через точки подпространства $\mathrm{Sing}Q\subset\mathbb{P}(V)$ и точки некоторой неособой квадрики Q' в дополнительном подпространстве H.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $Q'=H\cap Q$ неособа. Пусть это не так, и $\exists p\in H:\ \forall q'\in Q'\ \ (p,q)\subset Q'$. Докажем, что тогда p будет особой точкой и для Q, т.е. что $\forall q\in Q\ \ (p,q)\subset Q$. Для этого спроектируем произвольную точку $q\in Q$ на H из $\mathrm{Sing}Q$: имеется, как мы видели в n° 2.1.3, единственная прямая, которая проходит через q и пересекает $\mathrm{Sing}Q$ и H; пусть $s\in\mathrm{Sing}Q$ и $q'\in H$ — эти точки пересечения. Поскольку $s\in\mathrm{Sing}Q$, мы заключаем, что $(sq)\subset Q$, т.е. $q'\in Q'$ (см. рис. 8–E). Но тогда $(q'p)\subset Q'\subset Q$. Заметим теперь, что прямая (pq) заметается точками своего пересечения со всевозможными прямыми (sx) с $x\in(pq')\subset Q'\subset Q$. Но все такие (sx) лежат на Q. Следовательно, $(p,q)\subset\mathbb{Q}$. □

Пусть H и L — дополнительные подпространства в $\mathbb{P}_n$. Фигура, заметаемая всеми прямыми, пересекающими L и какую-либо фигуру $\Phi\subset H$ называется *конусом с вершиной L и основанием* Φ.. Иначе такой конус можно представлять себе как полный прообраз фигуры Φ относительно отображения проектирования $\mathbb{P}_n$ из L на H. В этих терминах предыдущая теорема переформулируется так:

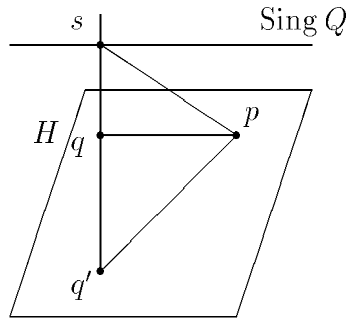

Рис. 8–E. $Q\cap H$.

3.6.1. Следствие. *Всякая квадрика в $\mathbb{P}_n$ представляет собой конус, вершина которого совпадает с пространством особых точек этой квадрики, а основанием является неособая квадрика в любом дополнительном подпространстве.*

3.7. Язык формул. Как мы видели в прошлой лекции, всякую квадрику в $\mathbb{P}_n$ в подходящих однородных координатах можно записать уравнением

$$q(t_0,t_1,t_2,\dots,t_n)=h(t_0,t_1,t_2,\dots,t_{2i+1)})+\alpha(t_{2i+2},\dots,t_r)\ ,$$

где $\alpha(t_{2i+2},\dots,t_r)$ — анизотропная (т.е. не обращающаяся в нуль нигде кроме нуля) форма, а

$$h(t_0,t_1,t_2,\dots,t_{2i+1}) = t_0t_{i+1} + t_1t_{i+2} + \dots + t_it_{2i+1}$$

— гиперболическая форма. Число r явно участвующих переменных равно рангу соответствующей симметричной билинейной формы $B_q(v,w)$. Число $2i+2$ равно размерности максимального гиперболического подпространства формы B_q, так что i —это размерность максимального изотропного подпространства. Линейная оболочка не участвующих в формуле остальных переменных $(t_{r+1},\dots,t_n)$ составляет ядро формы B_q. Число i называется *индексом* формы и равно размерности максимального изотропного подпространства формы q. Если форма q анизотропна, мы будем считать её индекс равным -1.

Задача 8.10. Усмотрите непосредственно из формулы, что проективизация ядра совпадает с множеством особых точек, и что квадрика представляет собой конус с вершиной в этом подпространстве над неособой квадрикой в пространстве переменных $(t_0,t_1,t_2,\dots,t_{2i+1})$ (эта неособая квадрика задаётся тем же самым уравнением!)ю

Остановимся более подробно на неособых квадриках. Всякая такая квадрика есть проективизация множества изотропных векторов невырожденной симметричной билинейной формы. В прошлой лекции мы выяснили, что всякий изотропный вектор в этой ситуации лежит в некотором максимальном изотропном подпространстве, а все такие подпространства имеют одну и ту же размерность и транзитивно переводятся друг в друга изометриями формы.

На геометрическом языке проективизация изотропного подпространства есть проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике. Максимальная из размерностей таких пространств называется *планарностью* квадрики. Мы по определению будем считать, что планарность пустой квадрики равна -1. Планарность непустой неособой квадрики совпадает с индексом квадратичной формы, задающей эту квадрику.

Наконец, проективизации изометрий формы $B_q(v,v)$ — это проективные автоморфизмы $\mathbb{P}_n$, которые переводят квадрику в себя. Множество всех таких автоморфизмов образует группу, называемую *группой (проективных) автоморфизмов квадрики* Q.

Таким образом алгебраические результаты прошлой лекции в геометрическом контексте можно подытожить в виде теоремы:

3.8. Теорема. *Неособая квадратичная форма индекса i определяет в $\mathbb{P}_n$ квадрику, через каждую точку которой проходит i-мерное проективное подпространство, целиком лежащее не квадрике. Группа проективных автоморфизмов квадрики действует на множестве таких подпространств транзитивно. Подпространств размерности больше, чем i, на квадрике не лежит (в частности, при $i=-1$ квадрика пуста). Индекс i может принимать любое значение в пределах $-1 \leqslant i \leqslant [n/2]$.*

3.9. Пересечение квадрики с касательной плоскостью. Чтобы роль алгебры не выглядела слишком преувеличенной, мы дадим сейчас не опирающееся на результаты прошлой лекции доказательство основного утверждения предыдущей теоремы — о связи между индексом и планарностью.

3.10. Теорема. *Пусть Q — неособая квадрика индекса i в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(v)$. Тогда:*

а) *Q не содержит проективных подпространств размерности $\geqslant i$;*

б) *Через каждую точку $p \in Q$ проходит $(i-1)$-мерное проективное подпространство, содержащееся в Q.*

в) *Эти подпространства находятся во взаимно-однозначном соответствии с $(i-2)$-мерными проективными подпространствами, лежащими на неособой квадрике индекса $(i-1)$ в $\mathbb{P}^{n-2}$.*

Доказательство. Индукция по n и i. База индукции состоит в том, что всякая квадрика индекса 0 (задаваемая анизотропной формой) пуста, любая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_0$ пуста, а невырожденная квадрика индекса 1 в $\mathbb{P}_1$ состоит из пары различных точек. Индуктивный переход основан на том, что всякое проективное подпространство, проходящее через точку $\langle v\rangle \in Q$ и лежащее на Q лежит в $T_V Q \cap Q$.

3.10.1. Лемма. *Пусть Q — неособая квадрика индекса $i \geqslant 1$ в $\mathbb{P}^n$ и $\langle v\rangle \in Q$. Тогда $T_V Q \cap Q$ является конусом с вершиной в точке $\langle v\rangle$ над неособой квадрикой индекса $(i-1)$ в $\mathbb{P}^{n-2}$, вложенном в $T_V Q$ в качестве произвольной гиперплоскости, не содержащей v.*

Доказательство. Пусть $T_V Q = \mathbb{P}(U)$, где

$$U = \mathrm{Ann}\rho_B(v) = \langle v\rangle^{\perp} = \{w \in V \mid B(w,v) = 0\},$$

а B — симметричная билинейная форма, задающая Q. Мы интересуемся структурой ограничения B_U формы B на U. Так как $B(v,v) = 0$ (ибо $\langle v\rangle \in Q$), то $v \in U$ и $v \in \ker B_U$. Выберем в V вектор $w \notin U$, так что $V = U \oplus \langle w\rangle$. Если бы $\dim\ker B_U \geqslant 2$, то это подпространство имело бы ненулевое пересечение с гиперплоскостью $U = \mathrm{Ann}\rho_B(w) = \langle w\rangle^{\perp}$, и вектор из этого пересечения был бы ортогонален всему V вопреки невырожденности Q. Тем самым, $\ker B_U$ — одномерное подпространство, порождённое V.

Выберем в U $(n-1)$-мерное подпространство W, трансверсальное к v, так что $U = \langle v\rangle \oplus W$. Ограничение B_W формы B на W будет (по только что доказанному) невырожденной формой, так что $V = W \oplus W^{\perp}$ и ограничение B на $W^{\perp}$ также невырождено. Поскольку в $W^{\perp}$ есть изотропный вектор v, это подпространство изоморфно гиперболической плоскости H_2. Следовательно, индекс формы B_W ровно на 1 меньше индекса формы B на V. $\square$

Теорема вытекает из леммы немедленно: максимальное проективное подпространство, лежащее в $T_V Q \cap Q$ должно быть конусом с вершиной в $\langle v\rangle$ над максимальным проективным подпространством, лежащим на неособой квадрике индекса $(i-1)$ в $\mathbb{P}^{n-2} \subset T_V Q$. $\square$

3.10.2. Следствие. *Две квадрики в $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда переводятся одна в другую преобразованием из $\mathbb{P}GL_n$, когда они имеют одинаковый ранг и индекс.*

3.10.3. Следствие. *Невырожденная квадрика либо пуста, либо не содержится ни в какой гиперплоскости.*

Доказательство. Если непустая невырожденная квадрика содержится в гиперплоскости H, то $H = T_V Q\, \forall \langle v\rangle \in Q$ и $Q = Q \cap T_V Q$ должна быть особой.

3.10.4. Следствие. $SingQ = \bigcap_{v \in Q} T_V Q$

3.11. Комплексные квадрики. Над алгебраически замкнутым полем квадрика однозначно с точностью до действия $\mathbb{P}GL$ определяется своим рангом, поскольку $\forall n$ имеется геометрически единственная неособая квадрика в $\mathbb{P}_n$. В подходящих координатах она задаётся

уравнением
$$t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_n^2 = 0$$
которое при нечётном n можно преобразовать к виду
$$t_0^2 + \cdots + t_{\frac{n-1}{2}}^2 - t_{\frac{n+1}{2}}^2 - \cdots - t_n^2 = 0$$
а при чётном n к виду
$$t_0^2 + \cdots + t_{\frac{n}{2}-1}^2 - t_{\frac{n}{2}}^2 - \cdots - t_{n-1}^2 - t_n^2 = 0$$

3.11.1. Следствие. *Через каждую точку неособой квадрики в $\mathbb{P}_n$ над алгебраически замкнутым полем проходит $[\frac{n-1}{2}]$ — мерная проективная плоскость, лежащая на квадрике, а плоскостей большей размерности на такой квадрике нет.*

3.12. Пример. Пусть поле k – алгебраически замкнуто. Тогда невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_0$ — пуста, в $\mathbb{P}_1$ — состоит из пары точек, в $\mathbb{P}_2$ — представляет собой кривую $t_0^2+t_1^2+t_2^2 = 0$, не содержащую прямых и называемую *коникой*. Невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ может быть задана уравнением
$$t_0t_3 = t_1t_2$$
и не содержит плоскостей. Через каждую её точку проходит пара прямых — её пересечение с касательной плоскостью. Эти прямые легко задать явными уравнениями. Пусть $p = (p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$ — лежит на квадрике. Тогда $\frac{p_0}{p_2} = \frac{p_1}{p_3}$ и $\frac{p_0}{p_1} = \frac{p_2}{p_3}$.

Если обозначить первую пару равных отношений через $\alpha_0 : \alpha_1$, а вторую — через $\beta_0 : \beta_1$, то равенства
$$t_0 : t_2 = t_1 : t_3 = \alpha_0 : \alpha_1 \qquad \text{и} \qquad t_0 : t_1 = t_2 : t_3 = \beta_0 : \beta_1 \tag{3-1}$$
как раз и зададут пару прямых, лежащих на квадрике и пересекающихся в точке p. Более того, координаты $(p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$ восстанавливаются по $\alpha_0 : \alpha_1$ и $\beta_0 : \beta_1$ по формулам
$$p_0 = \alpha_0\beta_0 \ p_1 = \alpha_0\beta_1 \ p_2 = \alpha_1\beta_0 \ p_3 = \alpha_1\beta_1 \tag{3-2}$$
Мы видим, таким образом, что при любом $\alpha_0 : \alpha_1 \in \mathbb{P}_1$ и любом $\beta_0 : \beta_1 \in \mathbb{P}_1$ уравнения (3-1) определяют пару прямых, лежащих на квадрике $t_0t_3 = t_1t_2$ и пересекающихся в точке p с координатами (3-2). Из этого следует, что все α-прямые являются попарно-скрещивающимися и все β-прямые являются попарно-скрещивающимися (иначе через точку пересечения двух, скажем, α-прямых, проходило бы 3 прямые, лежащие на квадрике — эти два, да ещё β-прямая). Мы получаем

3.12.1. Следствие. *Невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$, заданная уравнением $t_0t_3 = t_1t_2$, заметается двумя семействами прямых, так что каждая прямая из одного семейства пересекает каждую прямую из другого семейства, а прямые из одного семейства попарно скрещиваются. Каждое семейство прямых естественно параметризуется проективной прямой так, что сопоставление паре прямых из разных семейств их точки пересечения определяет биекцию $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ с рассматриваемой квадрикой.*

Отображение $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 : (\alpha_0 : \alpha_1; \beta_0 : \beta_1) \mapsto (\alpha_0\beta_0 : \alpha_0\beta_1 : \alpha_1\beta_0 : \alpha_1\beta_1)$ образом которого является квадрика $t_0t_3 = t_1t_2$ называется *вложением Сегре*.

3.13. Квадрики над $\mathbb{R}$. Над полем $\mathbb{R}$ уже имеются квадрики всех возможных индексов. По теореме Лагранжа любую неосоьую квадрику в подходящих координатах можно записать в виде

$$t_0^2 + \cdots + t_{i-1}^2 - t_i^2 - \cdots - t_{2i-1}^2 = t_{2i}^2 + \cdots + t_n^2.$$

Такая квадрика имеет индекс i и квадрики с разным i геометрически различны.

Так в $\mathbb{P}_1$ имеются 2 неособых квадрики: пара точек $t_0^2 - t_1^2 = 0$ и пустая $t_0^2 + t_1^2 = 0$. В $\mathbb{P}_2$ также 2 неособых квадрики: пустая (или *мнимая коника* $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 = 0$ и *действительная коника* $t_0^2 - t_1^2 = t_2^2$ (индекса 1). В $\mathbb{P}_3$ индекс может принимать три значения: 0, 1 или 2. Им соответствуют пустая квадрика $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0$, *эллиптическая квадрика* $t_0^2 - t_1^2 = t_2^2 + t_3^2$ и *гиперболическая квадрика* (или *квадрика Сегре*) $t_0 t_3 = t_1 t_2$. Эллиптическая квадрика не содержит прямых, а квадрика Сегре заметается двумя семействами прямых, как было показано выше.

3.14. Аффинные квадрики. Из описания проективных квадрик несложно получить описание аффинных квадрик с точностью до действия группы аффинно-линейных изоморфизмов.

> Задача 8.11. Докажите, что если вложить $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{P}_n$ в качестве аффинной карты, то группа аффинно-линейных изоморфизмов $\mathbb{A}^n$ естественно отождествляется с подгруппой в $\mathbb{P}GL_n$, переводящей в себя бесконечно-удалённую гиперплоскость этой карты.

Задача аффинной классификации, таким образом, сводится к описанию всех геометрических разных выборов взаимного расположения квадрики и гиперплоскости размерности 1 в $\mathbb{P}_n$ (эта гиперплоскость и будет бесконечно-удалённой). Если эта гиперплоскость — касательная к квадрике, то соответствующая аффинная квадрика называется *параболоидом*. Если она не является касательной, то пересекает квадрику по неособой квадрике, и взаимное расположение определяется в этом случае индексом квадрики, получающейся в пересечении. Если этот индекс — нуль, то аффинная квадрика называется *эллиптической*, если не нуль — то *гиперболической*. Таким образом *аффинная квадрика определяется (однозначно с точностью до действия аффинно-линейной группы) индексом своей проективизации, типом (параболический - непараболический) и индексом пересечения своей проективизации с бесконечно удалённой гиперплоскостью.*

> Задача 8.12. Дайте полный перечень аффинно-неэквивалентных уравнений квадрик в $\mathbb{A}^2$ и в $\mathbb{A}^3$.

§4. Поляритеты

Пусть $\beta: \ V \longrightarrow V^*$ — корреляция. Она индуцирует линейное проективное преобразование $\tilde{\beta}: \ \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee = \mathbb{P}(V^*)$. Такое преобразование называется *поляритетом* (или *полярным преобразованием*, если корреляция β невырождена и самосопряжена.

4.1. Полярная двойственность. Геометрически, невырожденное линейное проективное преобразование $: \ \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee$ есть взаимно-однозначное сопоставление точкам $\mathbb{P}_n$ гиперплоскостей[3] так, чтобы размерность линейной оболочки любого конечного набора точек была

[3]Ибо точка из $\mathbb{P}_n^\vee$ — это класс пропорциональных линейных уравнений на $\mathbb{P}_n$

равна коразмерности пересечения соответствующих им гиперплоскостей. При этом гиперплоскость, соответствующая некоторой точке, называется *полярой* этой точки, а сама точка — *полюсом* этой гиперплоскости.

Задача 8.13. Пусть

$$\beta : \ V \longrightarrow V^* \qquad \text{и} \qquad \beta^* : \ V^{**} = V \longrightarrow V^*$$

пара сопряжённых изоморфизмов, а

$$\tilde{\beta} : \ \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee \qquad \text{и} \qquad \tilde{\beta}^* : \ \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee$$

соответствующие линейные проективные преобразования. Убедитесь, что $\tilde{\beta}^*$-поляра произвольно заданной точки P есть геометрическое место $\tilde{\beta}$-полюсов всех гиперплоскостей, проходящих через точку P. Дайте аналогичное геометрическое описание в терминах $\tilde{\beta}$ для $\tilde{\beta}^*$-полюса произвольно заданной гиперплоскости π.

Из приведённого в задаче геометрического описания двойственной корреляции сразу следует, что невырожденное линейное проективное преобразование $: \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee$ тогда и только тогда является поляритетом (т.е. симметрично), когда для него справедлива теорема о *полярной двойственности*.

4.1.1. Утверждение. *При полярном соответствии точка p тогда и только тогда лежит на поляре точки q, когда точка q лежит на поляре точки p.*

4.1.2. Поляритеты и квадрики. Как мы видели в прошлой лекции, пространство симметричных корреляций $: V \longrightarrow V^*$ естественно изоморфно пространству квадратичных форм на V. При переходе к проективизациям это даёт взаимно-однозначное соответствие между поляритетами и классами пропорциональных квадратичных форм.

Чтобы описать это соответствие геометрически, вспомним, что класс пропорциональных квадратичных форм корректно задаёт проективную квадрику. Эта квадрика есть геометрическое место векторов, принадлежащих своим аннуляторам относительно поляризации рассматриваемой квадратичной формы. Поскольку корреляция, соответствующая квадратичной форме, как раз и сопоставляет вектору его аннулятор, мы получаем

4.1.3. Утверждение. *Геометрическое место точек, лежащих на своих полярах при некотором полярном соответствии является невырожденной квадрикой. Этим устанавливается взаимно-однозначное соответствие между квадриками и поляритами, согласованное с рассматривавшимся в прошлой лекции изоморфизмом пространств квадратичных форм и симметричных корреляций.*

Таким образом, геометрия поляритетов и геометрия квадрик — два логически эквивалентных языка. В частности, полюса и поляры относительно поляритета, канонически соответствующего некой квадратичной форме q, называются *полюсами и полярами относительно квадрики* $q = 0$. Тем не менее, язык поляритетов часто оказывается предпочтительнее, ибо он гораздо богаче. Например, если основное поле не является алгебраически-замкнутым (а это именно так в «обычной» вещественной геометрии), то имеется много квадрик, геометрически неразличимых, — скажем, пустых. И несмотря на то, что квадрика пуста, соответствующий ей поляритет является геометрически вполне наблюдаемым, причём алгебраически разным (непропорциональным) пустым квадрикам будут соответствовать геометрически разные поляритеты. Пустота соответствующих квадрик будет лишь свидетельством того, что эти поляритеты *не имеют точек, лежащих на своих полярах*.

> Задача 8.14. Геометрически опишите поляритеты вещественной плоскости, соответствующие пустым квадрикам, заданным в некоторой аффинной декартовой координатной системе уравнениями $x^2 + y^2 = -1$, $x^2 + 4y^2 = -1$ и $x^2 + y^2 = -4$.

Над алгебраически замкнутым полем соответствие между алгеброй и геометрией оказывается, как всегда, абсолютным и не требующим дополнительных оговорок. В частности, предыдущая задача допускает следующее решение в общем виде.

4.1.4. Утверждение. *Над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 поляра точки $p \in \mathbb{P}_n$ относительно квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ описывается как единственная гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, высекающая на Q то же множество точек, что и всевозможные касательные, которые можно провести к Q из точки p.*

Доказательство. Пусть

$$Q = \{\langle v\rangle \in V \mid B(v, v) = 0\} \quad \text{и} \quad p = \langle w\rangle \ .$$

Прямая (p, s), где $s = \langle u\rangle \in Q$ будет касаться квадрики в точке $\langle u\rangle$ тогда и только тогда, когда $B(u, w) = 0$, т.е. в точности тогда, когда $u \in Q \cap \mathbb{P}(\operatorname{Ann} \varrho_B(w))$. Но $\mathbb{P}(\operatorname{Ann} \varrho_B(w))$ это и есть поляра точки p относительно корреляции ϱ_B. $\square$

4.1.5. Пример. Для того чтобы на вещественной плоскости построить поляру точки p, лежащей вне круга, относительно окружности C, которая этот круг ограничивает, надо провести прямую через две точки касания с C пары касательных, опущенных на C из p (почему?).

> Задача 8.15. Постройте (циркулем и линейкой) поляру точки, лежащей внутри круга, и полюс прямой, не пересекающей круг.

§5. Линейные системы квадрик.

Симметричные корреляции (или квадратичные формы) на $(n+1)$-мерном векторном пространстве V сами сотавляют $(n+1)(n+2)/2$-мерное векторное пространство. Его проективизация будет $n(n+3)/2$-мерным проективным пространством. Геометрически это пространство можно интерпретировать как пространство поляритетов (каждой его точке соответствует единственный поляритет) или как пространство геометрических квадрик (если основное поле алгебраически замкнуто). Первая интерпретация тавтологична, вторая — возможна благодаря тому, что *над алгебраически замкнутым полем две квадратичных формы тогда и только тогда пропорциональны, когда они задают одну и ту же квадрику*. Мы не будем здесь доказывать это утверждение — доказательство бесхитростно и прямолинейно, но неизбежно громоздко.

Я предпочитаю говорить о «пространстве квадрик», а не о «пространстве поляритетов», и поэтому буду всюду далее считать основное поле алгебраически замкнутым.

5.1. Определение. *Всякое проективное подпространство в пространстве квадрик называется линейной системой квадрик.*

5.1.1. Пример. Все квадрики, проходящие через фиксированную точку $p \in \mathbb{P}_n$ составляют линейную систему коразмерности 1. Действительно, коэффициенты квадратичной формы являются однородными координатами на пространстве квадрик, а условие прохождения через данную точку — это одно нетривиальное *линейное* однородное условие на эти коэффициенты (продумайте это обязательно!). Этот пример составляет первый тривиальный частный случай $k = 0$ в следующей серии примеров:

> Задача 8.16. Докажите, что квадрики, касающиеся данного k-мерного проективного подпростьранства ($k = 1\,,\ 2\,,\ \dots\,,\ (n-1)$) составляют линейную систему.

Итак, изучение линейной геометрии пространства квадрик позволяет надеяться получать нетривиальные и уже нелинейные геометрические теоремы в исходном пространстве (где живут сами квадрики как геометрические фигуры). На алгебраическом жаргоне такой ход мысли иногда называют «счётом констант», поскольку типичный вопрос линейной геометрии — это вычисление размести того или иного подпространства.

5.1.2. Пример. Через любые 5 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести квадрику, причём малым шевелением точек всегда можно добиться того, чтобы эта квадрика была единственной. Действительно, пространство плоских квадрик пятимерно, а 5 гиперплоскостей в проективном 5-мерном пространстве всегда имеют непустое пересечение, причём если уравнения этих плоскостей линейно-независимы, то пересечение будет нульмерным проективным подпространством, т.е. одной точкой.

5.1.3. Пример. Через любые 9 точек на $\mathbb{P}_3$ можно провести квадрику, причём малым шевелением точек всегда можно добиться того, чтобы эта квадрика была единственной. Если в качестве девяти точек взять 3 группы из трёх точек, лежащих на трёх различных прямых (каждая группа — на своей прямой), то мы получим, что через любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ можно провести квадрику.

> Задача 8.17. Докажите, что если три прямые попарно скрещиваются, то проходящая через них квадрика неособа и единственна.

> Задача 8.18. В вещественном трёхмерном аффинном пространстве заданы 4 попарно скрещивающиеся прямые. Сколько существует прямых, пересекающих каждую из четырёх данных? Укажите все возможные ответы, и объясните как они зависят от исходной конфигурации прямых (в частности, укажите ответы, устойчивые относительно «малых шевелений» исходной конфигурации).