Лекция 7
Билинейные формы

▷Корреляции и билинейные формы ▷Ядра и невырожденность ▷Сопряжение операторов ▷Изометрии ▷Формы и операторы ▷Ортогоналы и проекторы ▷Изотропные подпространства ▷Приведение косых форм ▷Пфаффиан ▷Евклидова, симплектическая, комплексная и эрмитова структуры ▷Поляризация квадратичных форм ▷Теорема Лагранжа ▷Гиперболичность и анизотропность ▷Отражения ▷Теорема Витта ▷Сигнатура вещественных квадратичных форм ▷Формы над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

§1. Билинейные формы и корреляции.

Всюду в этом параграфе через V обозначается векторное пространство над произвольным полем k с $\mathrm{char} k \neq 2$.

1.1. Определение. *Отображение $B:\ V\times V \longrightarrow k$ называется билинейной формой, если оно удовлетворяет условиям:*

(i) $B(\lambda v,w)=\lambda B(v,w)=B(v,\lambda w)\quad \forall v,w\in V\ \forall\lambda\in k$

(ii) $\begin{cases} B(v_1+v_2,w) &=& B(v_1,w)+B(v_2,w) & \forall v_1,v_2,w\in V\\ B(v,w_1+w_2) &=& B(v,w_1)+B(v,w_2) & \forall v,w_1,w_2\in V\end{cases}$

То, что билинейная форма является линейным отображением по каждому из своих аргументов, по-другому можно выразить так: фиксация в качестве левого (или правого) аргумента B произвольного вектора v определяет *линейные функционалы*

$$\lambda_B(v)=B(v,*)\in V^*:\ w\mapsto B(v,w)$$

$$\varrho_B(v)=B(*,v)\in V^*:\ w\mapsto B(w,v)$$

причём возникающие таким образом отображения

$$\lambda_B:\ V\longrightarrow V^*:\ v\mapsto B(v,*)$$

$$\varrho_B:\ V\longrightarrow V^*:\ v\mapsto B(*,v)$$

будут *линейными операторами*. Они называются, соответственно, *левой* и *правой корреляциями* билинейной формы B.

1.2. Определение. *Корреляцией на векторном пространстве V называется всякий линейный оператор*

$$\beta:\ V \longrightarrow V^*.$$

1.3. Связь между формами и корреляциями. Всякая билинейная форма B, как мы только что видели, определяет две корреляции на V. Наоборот, по произвольной корреляции $\beta:\ V \longrightarrow V^*$ можно построить две формы L_β и R_β, для которых β будет, соответственно, левой и правой корреляцией:

$$\begin{aligned} L_\beta(v,w) &= \langle \beta v, w\rangle \\ R_\beta(v,w) &= \langle w, \beta v\rangle \end{aligned}$$

(через $\langle \xi, v\rangle$ мы, как и в первой лекции, обозначаем свёртку ковектора ξ и вектора v). Видно, что $L_\beta(v,w) = R_\beta(w,v)$, т.е. L_β и R_β отличаются перестановкой аргументов.

Чтобы выяснить, чем отличаются друг от друга левая и правая корреляции λ_B и ϱ_B одной и той же билинейной формы B на V, вспомним, что имеется каноническое отождествление V с V^{**}, и что каждому оператору

$$F:\ V \longrightarrow W$$

соответствует *сопряжённый оператор* (см. первую лекцию)

$$F^*:\ W^* \longrightarrow V^*,$$

определяемый по правилу $\langle F^*\xi, v\rangle_V = \langle \xi, Fv\rangle_W \quad \forall \xi \in W^*\ \forall v \in V$. Если $W = V^*$ и $F:\ V \longrightarrow V^*$ — корреляция, то $F^*:\ V^{**} = V \longrightarrow V^*$ также будет корреляцией. Она называется *сопряжённой* корреляцией к F. Сопоставляя все определения, видим, что *левая и правая корреляции λ_B и ϱ_B одной и той же билинейной формы B сопряжены*: $\lambda_B^* = \varrho_B$.

Задача 7.1. Убедитесь в этом!

Таким образом, задание билинейной формы B равносильно заданию, например, правой корреляции ϱ_B, а сопряжённая корреляция $\varrho_B^* = \lambda_B$ будет левой корреляцией для B и правой корреляцией для *транспонированной* формы $B'(v,w) = B(w,v)$.

1.4. Симметричные и кососимметричные формы. Форма B называется *симметричной* или *кососимметричной* в соответствии с тем, удовлетворяет ли она равенству

$$B(v,w) = B(w,v) \quad \forall v,w \in V$$

или равенству

$$B(v,w) = -B(w,v) \quad \forall v,w \in V$$

Задача 7.2. Докажите, что над полем k с $\mathrm{char}(k) \neq 2$ второе условие на билинейную форму B равносильно условию $B(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$.

Указание: см. последнюю лекцию прошлого семестра.

Произвольная билинейная форма B однозначно представима в виде суммы симметричной и кососимметричной:

$$B(v,w) = B_+(v,w) + B_-(v,w),$$

где

$$B_+(v,w) = \frac{B(v,w)+B(w,v)}{2} \quad B_-(v,w) = \frac{B(v,w)-B(w,v)}{2}$$

Задача 7.3. Убедитесь, что совокупность всех билинейных форм $\mathcal{B}(V)$ на векторном пространстве V является векторным пространством, а симметричные формы $\mathcal{B}_+(V)$ и кососимметричные формы $\mathcal{B}_-(V)$ — трансверсальные подпространства в нём, причём $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_+(V) \oplus \mathcal{B}_-(V)$.

Задача 7.4. Вычислите $\dim \mathcal{B}(V)$, $\dim \mathcal{B}_+(V)$ и $\dim \mathcal{B}_-(V)$, если $\dim V = n$.

1.5. Матрицы Грама Если $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ — какой-то набор векторов, то значение билинейной формы $B(w_1, w_2)$ на любых векторах w_1, w_2 из их линейной оболочки однозначно определяется, если известна матрица всевозможных значений $B(v_i, v_j)$. Эта матрица обозначается $G_B(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ и называется матрицей Грама формы B в наборе $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Если (x_1) и (x_2) — столбцы коэффициентов разложений векторов w_1, w_2 по образующим v_i, то

$$B(w_1, w_2) = (x_1)^t G(x_2),$$

где $G = G_B(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Если $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_m) C_{v\tau}$, то

$$G_B(\tau) = C^t_{v\tau} G_B(v) C_{v\tau}$$

Матрица Грама билинейной формы B в *базисе* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V совпадает с матрицей оператора правой корреляции ρ_B в двойственных базисах $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ пространств V и V^*. Действительно, числа $B(e_1, e_k), \ldots, B(e_n, e_k)$, равные, по определению, значениям $\langle \rho e_k, e_1\rangle, \ldots, \langle \rho e_k, e_n\rangle$, являются в точности координатами функционала ρe_k в двойственном к $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базисе $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ пространства V^*.

Задача 7.5. Убедитесь, что оператор левой корреляции λ_B будет задаваться транспонированной матрицей.

1.6. Ядра и невырожденность. Ядра левой и правой корреляций билинейной формы B

$$\begin{aligned} {}^\perp V_B &= \{v \mid B(v,w) = 0 \quad \forall w \in V\} && = \ker \lambda_B \\ V_B^\perp &= \{v \mid B(w,v) = 0 \quad \forall w \in V\} && = \ker \rho_B \end{aligned}$$

называются соответственно *левым* и *правым ядром* формы B. Их коразмерности равны размерностям образов левой и правой корреляций, а стало быть, они одинаковы и совпадают с рангом матрицы Грама формы B в произвольном базисе пространства V.

Таким образом *левое и правое ядро имеют одинаковую размерность*. Эта размерность называется *корангом* формы B и равна $\dim V - \operatorname{rk} G_B$, где G_B — матрица Грама B в любом базисе. Число $\operatorname{rk} G_B$ не зависит от выбора базиса и называется *рангом* формы B. Ранг и коранг формы B обозначаются через $\operatorname{rk} B$ и $\operatorname{cork} B$. Из сказанного немедленно следует

1.6.1. Утверждение. *Для билинейной формы B на V следующие условия равносильны:*
(i) $\det G_B \neq 0$
(ii) правая корреляция $\rho_\beta : V \longrightarrow V^*$ — изоморфизм.
(iii) левая корреляция $\lambda_\beta : V \longrightarrow V^*$ — изоморфизм.

(iv) $\forall v \neq 0 \; \exists w : \; B(v,w) \neq 0$
(v) $\forall v \neq 0 \; \exists w : \; B(w,v) \neq 0$

Форма B, удовлетворяющая перечисленным условиям, называется *невырожденной*.

1.6.2. Ядра (косо)симметричных форм. Исследование симметричных или кососимметричных билинейных форм легко сводится к изучению невырожденных форм.

Левое ядро (косо)симметричной формы B совпадает с правым ядром. Назовём его просто *ядром формы* и обозначим $\ker B$. Если U — какое-либо дополнительное к $\ker B$ подпространство, то ограничение B_U формы B на U будет невырожденно, и в любом базисе, согласованном с разложением $V = \ker B \oplus U$, форма B будет иметь блочную матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_U \end{pmatrix}$ с $\det B_U \neq 0$.

Задача 7.6. Проверьте, что верно и обратное: если форма имеет матрицу Грама указанного вида, то ядро формы представляет собой линейную оболочку первых базисных векторов (отвечающих левому верхнему нулевому блоку).

Задача 7.7. Докажите, что правило $\tilde{B}([v],[w]) \stackrel{\text{def}}{=} B(v,w)$ корректно определяет (косо)симметричную билинейную форму на $V/\ker B$ и эта форма невырождена.

Задача 7.8. Пусть U и W — два дополнительных подпространства к ядру $\ker B$. Докажите, что проекция U на W вдоль $\ker B$ является изометрическим[1] изоморфизмом.

Иначе говоря, всякое пространство с (косо)симметричной формой есть прямая огтогональная сумма ядра и пространства с невырожденной формой, причём последнее определяется по исходной форме однозначно с точностью до изоморфизма, сохраняющего первоначальную форму и тождественного на ядре.

§2. Невырожденные формы.

В этом параграфе мы обсудим свойства певырожденных билинейных форм над любым полем характеристики $\neq 2$. Оказывается, что даже без условий симметричности и положительной определённости невырожденные билинейные формы сохраняют многие геометрические свойства скалярного произведения.

2.1. Сопряжение операторов. Пусть $V \xrightarrow{F} W$ — линейный оператор, а $W^* \xrightarrow{F^*} V^*$ — сопряжённый оператор, так что $\langle F^*\xi, v\rangle_V = \langle \xi, Fv\rangle_W \quad \forall \xi \in W^*$ и $\forall v \in V$. Если на пространствах V и W имеются невырожденные билинейные формы, то мы можем отождествить V^* с V, а W^* с W посредством левых или правых корреляций, и рассматривать оператор F^* как оператор из W в V. Говоря более формально, существуют и единственны такие операторы ${}^\vee F$ и $F^\vee$, которые включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\sim]{\lambda_{B_W}} & W^* \\ {\scriptstyle {}^\vee F}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ V & \xrightarrow[\sim]{\lambda_{B_V}} & V^* \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\sim]{\varrho_{B_W}} & W^* \\ {\scriptstyle F^\vee}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ V & \xrightarrow[\sim]{\varrho_{B_V}} & V^* \end{array}$$

[1]Т.е. значение формы на любой паре векторов из U будет совпадать со значением формы на паре их образов в W.

Оператор ${}^{\vee}F = \lambda_{B_V}^{-1} F^* \lambda_{B_W}$ называется *левым сопряжённым*, а оператор $F^{\vee} = \varrho_{B_V}^{-1} F^* \varrho_{B_W}$ — *правым сопряжённым* оператором к оператореу F. Условия

$$\lambda_{B_V} {}^{\vee}F = F^* \lambda_{B_W} \qquad \text{и} \qquad \varrho_{B_V} F^{\vee} = F^* \varrho_{B_W}$$

эквивалентны условиям

$$\begin{array}{rcl} B_V({}^{\vee}Fw, v) & = & B_W(w, Fv) \\ B_V(v, F^{\vee}w) & = & B_W(Fv, w) \end{array} \qquad \forall v \in V\ \forall w \in W$$

Если $V = W$, а форма $B_V = B_W$ симметрична, кососимметрична или эрмитова, две написанные выше формулы равносильны друг другу. В этих случаях левый и правый сопряжённый операторы совпадают друг с другом и с тем сопряжённым оператором, который мы определили в лекции 5. Таким образом, термин «сопряжённый», который мы использовали в лекции 5 и в лекции 1 в различных контекстах, в действительности описывал одно и то же явление.

Задача 7.9. Выразите матрицу сопряжённого оператора в некоторых базисах через матрицы Грама этих базисов и матрицу исходного оператора.

Задача 7.10. Проверьте, что и левое и правое сопряжение являются линейными антиизоморфизмами алгебры $\mathrm{Hom}(V, W)$ с алгеброй $\mathrm{Hom}(W, V)$.

Задача 7.11. Приведите пример оператора на пространстве с билинейной несимметричной формой, который не равен своему дважды сопряжённому.

Задача 7.12. Докажите, что условия

$${}^{\vee\vee}F = F \qquad {}^{\vee}F = F^{\vee} \qquad F^{\vee\vee} = F$$

попарно эквивалентны (соответствующие операторы называются *рефлексивными*).

2.2. Изометрии. По аналогии с евклидовыми пространствами, линейный оператор $V \xrightarrow{F} W$ между пространствами с билинейными формами B_V и B_W называется *изометрическим*, если

$$B_W(Fv_1, Fv_2) = B_V(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

Под *изоморфизмом* пространств с билинейной формой всегда понимается их изометрический изоморфизм. Две формы на одном пространстве называются *эквивалентными*, если существует изометрический изоморфизм этого пространства как пространства с одной из форм на себя же, но как пространство с другой формой (т.е. если $B_1(v, w) = B_2(Fv, Fw)\, \forall v, w \in V$ для некоторого $F \in GL(V)$)

2.2.1. Лемма. *Если форма на пространстве V невырождена, то всякий изометрический оператор $F :\ V \longrightarrow W$ в любое пространство W с (возможно, вырожденной) билинейной формой является вложением.*

Доказательство. $\forall v \in \ker F$, $\forall w \in V$ имеем

$$B_V(v, w) = B_W(Fv, Fw) = B_W(0, Fw) = 0,$$

откуда $v \in \ker \lambda_{B_V} = 0$.

2.2.2. Следствие. *Всякий изометрический оператор на пространстве с невырожденной билинейной формой обратим.*

Задача 7.13. Докажите, что для обратимого оператора $F : V \longrightarrow W$ усовия

$$F \text{ — изометрия} \qquad {}^{\vee}F = F^{-1} \qquad F^{\vee} = F^{-1}$$

попарно эквивалентны (в частности, всякий изометричный оператор рефлексивен).

2.3. Формы и операторы. На пространстве с невырожденной билинейной формой имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и билинейными формами.

2.3.1. Утверждение. *Если на векторном пространстве V над произвольным полем k фиксирована невырожденная билинейная форма $B : V \times V \longrightarrow k$, то для любой билинейной формы $Q : V \times V \longrightarrow k$ существует и единственен линейный оператор $F_Q : V \longrightarrow V$ такой, что $\forall v, w \in V$*

$$Q(v, w) = B(v, F_Q w).$$

Доказательство. Написанное условие равносильно тому, что в любом базисе $e = \{e_\nu\}$ пространства V матрица оператора F_Q выражается через матрицы Грама $B_e = (B(e_i, e_j))$ и $Q_e = (Q(e_i, e_j))$ по формуле

$$F_Q = B_e^{-1} Q_e \, .$$

□

В случае, когда пространство V евклидово, а в качестве невырожденной формы берётся скалярное произведение, соответствие между формами и операторами получается особенно простым. Действительно, зафиксировав ортонормированный базис пространства V, мы должны будем сопоставить билинейной форме линейный оператор, матрица которого совпадает с матрицей Грама этой формы. В частности, (косо)симметричным формам будут соответствовать в точности (анти)самосопряжённые операторы. Вспоминая результаты о диагонализации нормальных операторов (см. лекцию 5), мы получаем

2.3.2. Следствие. *Всякая симметрическая билинейная форма в евклидовом пространстве может быть в подходящем ортонормальном базисе записана диагональной матрицей Грама, причём совокупность диагональных элементов не зависит от выбора ортонормального базиса.*

2.3.3. Следствие. *Всякая кососимметрическая билинейная форма в евклидовом пространстве может быть в подходящем ортонормальном базисе записана матрицей Грама*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} , \quad \text{где} \quad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -a_\nu \\ a_\nu & 0 \end{pmatrix} , \tag{2-1}$$

где $a_\nu \in \mathbb{R}$ положительны и не зависят от выбора ортонормального базиса.

Эти результаты можно применять, к примеру, для одновременного приведения пары симметрических форм на вещественном векторном пространстве к заданным видам.

Задача 7.14. Пусть на вещественном векторном пространстве заданы две пары симметричных билинейных форм (A_1, A_2) и (B_1, B_2), причём хотя бы одна из форм в каждой паре невырождена. Докажите, что одна пара тогда и только тогда может быть преобразована в другую подходящей линейной заменой координат, когда $\det(A_1 + \lambda A_2) = \det(B_1 + \lambda B_2)$ как многочлены от λ.

§3. Ограничение формы на подпространство

3.1. Ортогоналы. Пусть $U \subset V$ — подпространство. Его *правым* и *левым ортогоналами* относительно билинейной формы B называются подпространства

$$\begin{aligned} U_B^{\perp} &= \operatorname{Ann}(\lambda_B(U)) = \{v \in V \mid B(u,v) = 0 \quad \forall u \in U\} \\ {}^{\perp}U_B &= \operatorname{Ann}(\varrho_B(U)) = \{v \in V \mid B(v,u) = 0 \quad \forall u \in U\} \end{aligned}$$

Из невырожденности формы следует, что $\dim \lambda_B(U) = \dim \varrho_B(U) = \dim U$, так что

$$\dim {}^{\perp}U = \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U \ .$$

3.1.1. Лемма. *Следующие условия равносильны:*
(i) Ограничение формы B на подпространство U невырожденно.
(ii) $V = U \oplus U^{\perp}$
(iii) $V = U \oplus {}^{\perp}U$

Доказательство. Условие (i) равносильно каждому из условий

$$\forall\,\text{ненулевого } u \in U\ \exists u' \in U :\ B(u', u) \neq 0$$

$$\forall\,\text{ненулевого } u \in U\ \exists u'' \in U :\ B(u, u'') \neq 0$$

которые означают, соответственно, что ${}^{\perp}U \cap U = 0$ и $U \cap U^{\perp} = 0$. Из соображений размерности, эти равенства равносильны свойствам (ii) и (iii). □

3.1.2. Следствие. *Условия на подпространство $U \subset V$:*
(i) ограничение формы B на U невырожденно;
(ii) ограничение формы B на ${}^{\perp}U$ невырожденно;
(iii) ограничение формы B на $U^{\perp}$ невырожденно
попарно эквивалентны.

3.2. Изотропные подпространства. Разумеется, ограничение невырожденной билинейной формы на подпространство не всегда является невырожденной формой. Более того, это ограничение может оказаться нулевым. Подпространства, на которые билинейная форма ограничивается в тождественно нулевую, называются *изотропными*. Ненулевые векторы v, для которых $B(v, v) = 0$ называются *изотропными векторами*. Они порождают одномерные изотропные подпространства.

3.2.1. Лемма. *Пусть U является изотропным подпространством в векторном пространстве V с невырожденной билинейной формой. Тогда $2 \dim U \leqslant \dim V$.*

Доказательство. Если $U \subset V$ изотропно, то $U \subset U^{\perp}$. Поэтому

$$\dim U \le \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U,$$

что и требовалось.

Примечательно, что эта оценка является точной.

3.3. Пример: гиперболическое пространство H_{2n} по определению, представляет собой прямую сумму $V^* \oplus V$ (где $\dim V = n$). На нём имеется каноническая симметричная билинейная форма h, которая ограничивается в тождественно нулевую форму на V и на V^*, а на паре вектор-ковектор принимает значение равное свёртке:

$$h(\xi, v) = h(v, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi, v\rangle \quad \forall \xi \in V^* \ \forall v \in V.$$

По этим данным h однозначно восстанавливается, и её действие на произвольные $w_1 = \xi_1 + v_1$ и $w_2 = \xi_2 + v_2$ задаётся формулой:

$$h(w_1, w_2) = \langle \xi_1, v_2\rangle + \langle \xi_2, v_1\rangle.$$

Если выбрать в H_{2n} базис, состоящий из произвольного базиса в V и двойственного ему базиса в V^*, то матрица Грама формы h в таком базисе будет иметь блочный вид: $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где 0 — нулевая, а E — единичная $n \times n$-матрицы. Поэтому h невырождена, а V и V^* являются изотропными подпространствами половинной размерности в H_{2n}.

Задача 7.15. Докажите, что следующие условия на подпространство с невырожденной симметричной формой попарно эквивалентны:

а) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству;

б) V является прямой суммой двух изотропных подпространств;

в) $\dim V$ — чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

3.4. Пример: симплектическое пространство Ω_{2n} определяется аналогично гиперболическому пространству. А именно, рассмотрим, как и выше, прямую сумму $V^* \oplus V$ (где $\dim V = n$) и определим на ней кососимметричную билинейную форму ω, которая действует на произвольные $w_1 = \xi_1 + v_1$ и $w_2 = \xi_2 + v_2$ по правилу:

$$\omega(w_1, w_2) = \langle \xi_1, v_2\rangle - \langle \xi_2, v_1\rangle.$$

Задача 7.16. Убедитесь, что в базисе пространства Ω_{2n}, составленном из произвольного базиса в V и двойственного ему базиса в V^*, матрица Грама формы ω имеет блочный вид: $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, где 0 — нулевая, а E — единичная $n \times n$-матрицы.

Из этой задачи немедленно вытекает, что ω невырождена, а V и V^* являются изотропными подпространствами половинной размерности в Ω_{2n}. Матрица J называется *симплектической единицей* (отметьте, что $\det J = 1$ и $J^2 = -E$). Базис, в котором невырожденная билинейная кососимметричная форма имеет матрицу Грама J, называется *симплектическим базисом* для этой формы.

Оказывается, что всякое пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно симплектическому пространству (и в частности, автоматически чётномерно). Это вытекает из следующей фундаментальной теоремы.

3.5. Теорема. *Пусть на векторном пространстве V задана невырожденная кососимметричная форма $\alpha(v,w)$. Тогда в V можно выбрать базис в котором матрица Грама формы α имеет блочно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В качестве первого базисного вектора конструируемого базиса выберем произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Поскольку форма невырождена, должен найтись вектор $w \in V$, такой что $\alpha(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = a^{-1} \cdot w$. Матрица Грама ограничения исходной формы на линейную оболочку V_{12} векторов e_1 и e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и следовательно, это ограничение невырожденно. По лемме из Лем.3.1.1 имеется разложение $V = V_{12} \oplus W$, где $W = {}^{\perp}V_{12} = V_{12}^{\perp}$ (ортогоналы совпадают вследствие кососимметричности формы!). По лемме из Сл.3.1.2 ограничение формы на подпространство W невырожденно. Применяя индукцию по размерности, мы можем выбрать в W базис с нужными свойствами. Объединяя его с векторами e_1 и e_2, мы получим искомый базис в V. $\square$

Задача 7.17. Что служит базой индукции в проделанном выше рассуждении?

Задача 7.18. Убедитесь, что пространство с формой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

изометрично симплектическому пространству.

Задача 7.19. Убедитесь непосредственно, что определитель кососимметричной квадратной матрицы нечётного размера равен нулю.

Задача 7.20. Докажите, что пространство с кососимметричной формой распадается в прямую сумму ядра формы и пространства с невырожденной кососимметричной формой (автоматически чётномерного).

Таким образом, мы получили полное описание кососимметричных билинейных форм. Любопытным следствием этого описания является такой факт.

Пусть $A = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = -a_{ji}$ — кососимметричная матрица чётного размера. Если её коэффициенты над главной диагональю a_{ij} с $i < j$ рассматриваются как независимые переменные, то в кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ многочленов с целыми коэффициентами от этих переменных можно извлечь квадратный корень из $\det(a_{ij})$. Точнее, имеет место

3.6. Теорема. *Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметричная матрица чётного размера. Существует единственный многочлен $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, такой что*

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Pf}\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\right) = 1\ .$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу A как матрицу кососимметричной формы на координатном векторном пространстве над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с $i < j$. Она, очевидно, невырожденна, а стало быть в подходящем базисе имеет матрицу Грама

$$\Omega_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\ .$$

На языке матриц это означает, что $A = C^t \cdot \Omega_{2n} \cdot C$ для некоторой матрицы C, элементы которой суть отношения полиномов от a_{ij} с рациональными коэффициентами. Переходя к определителям, получаем $\det(A) = \det(C)^2$.

Далее, $\det(C)$ можно записать в виде отношения двух многочленов с целыми коэффициентами, не имеющих общих делителей в $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кроме, может быть ± 1. Многочлен-знаменатель в таком представлении обязан быть равен ± 1, поскольку $\det(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, а в кольце многочленов от нескольких переменных с целыми коэффициентами справедлива теорема об однозначности разложения на простые множители. Следовательно, $\det(C) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$.

Задача 7.21. Убедитесь, что если уравнение

$$F(t_1, \ldots, t_n) = X(t_1, \ldots, t_n)^2$$

разрешимо относительно X в кольце $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$, то решение единственно с точностью до знака.

В нашем случае знак однозначно выбирается из условия $\mathrm{Pf}\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$. □

Корень из определителя кососимметрической матрицы чётного размера, нормированный так, как указано в теореме, называется *пфаффианом*. Как и определитель, пфаффиан является неким универсальным многочленом от коэффициентов матрицы.

Задача 7.22. Напишите явные формулы для пфаффианов 2-го, 4-го и 6-го порядка.

Значение пфаффиана на какой-либо конкретной числовой матрице называется *пфаффианом этой матрицы*.

§4. Овеществление эрмитова пространства

Если W —комплексное эрмитово пространство, то его овеществление $W_{\mathbb{R}}$ наследует три геометрических структуры, взаимодействие которых мы сейчас обсудим.

4.1. Евклидова, симплектическая и комплексная структуры на $W_{\mathbb{R}}$ Пусть W — n-мерное комплексное эрмитово пространство. Его овеществление $W_{\mathbb{R}}$ является вещественным $2n$-мерным пространством. Как мы видели в лекции 4, оператор умножения векторов комплексного пространства W на комплексное число i в овеществлении $W_{\mathbb{R}}$ наблюдается в виде линейного оператора *комплексной структуры* $I\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}},W_{\mathbb{R}}):\ I^2=-E$

Эрмитова форма $(v,w):\ W\times W\longrightarrow\mathbb{C}$ является вещественно-билинейной комплексно-значной формой. Разделяя у неё вещественную и мнимую части, получим две вещественно-билинейных вещественнозначных формы на $W_{\mathbb{R}}$:

$$g:\ W_{\mathbb{R}}\times W_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbb{R}:\ g(v,w)=\mathrm{Re}(v,w)$$

$$\omega:\ W_{\mathbb{R}}\times W_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbb{R}:\ \omega(v,w)=\mathrm{Im}(v,w)$$

Из эрмитовости $(v,w)=\overline{(w,v)}$ вытекает, что g является *симметричной*, а ω — *кососимметричной* формой. Из условия $(v,v)>0\ \forall v\neq0$ следует, что g — положительно определена. Таким образом, *вещественная часть эрмитовой формы на W задаёт евклидову структуру на $W_{\mathbb{R}}$.*

Кососимметрическая форма ω является *невырожденной* и определяет на $W_{\mathbb{R}}$ структуру симплектического пространства.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим в W комплексный базис

$$\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}\ ,$$

ортонормированный относительно эрмитовой структуры на W и построим по нему базис

$$\{e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n\}$$

овеществлённого пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Равенства

$$(e_\mu,e_\nu)=(ie_\mu,ie_\nu)=\delta_{\mu\nu}$$

$$(ie_\mu,e_\nu)=-(e_\mu,ie_\nu)=i(e_\mu,e_\nu)=i\delta_{\mu\nu}$$

показывают, что базис $\{e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n\}$ является ортонормированным для симметричной формы g и симплектическим для кососимметричной формы ω, т.е. матрица Грама формы ω имеет в нём блочный вид:

$$J=\begin{pmatrix}0&-E\\E&0\end{pmatrix},$$

где E — единичная $n\times n$-матрица (обратите внимание, что матрица оператора комплексной структуры I в базисе $\{e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n\}$ также совпадает с J).

Таким образом, на овеществлении $W_{\mathbb{R}}$ комплексного эрмитова пространства W имеется комплексная структура I, евклидова структура g и симплектическая структура ω. Эти структуры не произвольны друг по отношению к другу, а связаны некоторыми *условиями согласованности*.

4.2. Согласованность форм g и ω с комплексной структурой. Поскольку эрмитова форма удовлетворяет равенствам:

$$(iv,iw)=(v,w)\qquad\text{и}\qquad(v,iw)=-i(v,w),$$

оператор комплуксной структуры I удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} g(Iv, Iw) &= g(v,w) \\ \omega(Iv, Iw) &= \omega(v,w) \qquad \forall v, w \in W_{\mathbb{R}}. \\ g(v, Iw) &= \omega(v,w) \end{cases}$$

Первые два условия означают, что I является *изометрией* как для g, так и для ω.

4.2.1. Утверждение. *Пусть W — $2n$-мерное вещественное векторное пространство. Для каждого из следующих двух наборов данных:*

(i) евклидовой формы $\omega: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ и её изометрии I с $I^2 = -E$

(ii) симплектической формы $g: W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ и её изометрии I с $I^2 = -E$

на W имеется единственная структура комплексного эрмитова n-мерного пространства, индуцирующая при овеществлении эти вещественные данные.

Доказательство. Зададим на W умножение векторов на комплексные числа при помощи оператора I (как это объяснялось в прошлой лекции), и определим форму (v,w) правилами:

в случае (i) : $(v,w) = g(v,w) + ig(v, Iw)$;

в случае (ii) : $(v,w) = -\omega(v, Iw) + i\omega(v,w)$;

Проверим, что в первом случае получается эрмитова форма. Для этого положим

$$\omega(v,w) \stackrel{\text{def}}{=} g(v, Iw),$$

так что $(v,w) = g(v,w) + i\omega(v,w)$. Убедимся, что ω — кососимметрична:

$$\omega(w,v) = g(w, Iv) = g(Iw, I^2v) = -g(Iw, v) = -g(v, Iw) = -\omega(v,w)$$

Но тогда $(v,w) = \overline{(w,v)}$ и $(v,v) = g(v,v) > 0$ $\forall v \neq 0$. Для проверки полуторалинейности достаточно убедиться, что $(iv, w) = i(v,w) = -(v, iw)$, т.е. что

$$g(Iv, w) = -\omega(v,w) = -g(v, Iw)$$

Но это следует из того, что I изометрия для g и из $I^2 = -E$.

Задача 7.23. Проверьте, что во втором случае также получается эрмитова форма.

□

4.3. Согласованность евклидовой и симплектической структуры. Чтобы найти условия согласованности форм g и ω необходимые и достаточные для того, чтобы восстановить эрмитову структуру, построим такой оператор $A: W \longrightarrow W$, что

$$g(v, Aw) = \omega(v,w) \quad \forall v, w \in W.$$

D ортонормированном базисе для g матрица оператора A будет совпадать с матрицей Грама формы ω. Поэтому A будет кососимметричным оператором[2]. Как мы видели, в W можно

[2]Это видно и без матриц:

$$g(v, Aw) = \omega(v,w) = -\omega(w,v) = -g(w, Av) = g(w, -Av) = g(-Av, w)$$

показывает, что $A^* = -A$

выбрать такой ортонормальный (относительно g) базис, чтобы A записывался в нём матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -a_\nu \\ a_\nu & 0 \end{pmatrix}, \tag{4-2}$$

где $a_\nu \in \mathbb{R}$ положительны и однозначно определяются тем, что $\{\pm i a_\nu\}$ — это в точности все (с учётом кратностей) корни характеристического многочлена оператора A. Поскольку симплектическая структура, индуцированная эрмитовой формой, имеет $a_\nu = 1$, мы получаем

4.3.1. Следствие. *Пусть W — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $g(v,w)$. Следующие свойства билинейной кососимметричной формы $\omega:\ W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ попарно эквивалентны:*

(i) На W имеется эрмитова структура, индуцирующая g и ω.

(ii) В ортонормальном базисе для формы g матрица Грама формы ω имеет характеристический многочлен $(t^2+1)^n$.

(iii) В ортонормальном базисе для формы g форма ω имеет матрицу Грама Ω, удовлетворяющую условию $\Omega^2 = -E$.

Задача 7.24. Докажите, что в симплектическом пространстве всегда можно найти симплектический базис.

Задача 7.25. Докажите, что в симплектическом пространстве всегда можно ввести эрмитову структуру, которая бы индуцировала имеющуюся на нём симплектическую форму как мнимую часть эрмитова скалярного произведения.

Задача 7.26. Докажите, что все изометрии симплектического пространства (т.е. операторы $F:\ \omega(Fv,Fw) = \omega(v,w)\ \forall v,w$) имеют определитель 1 и возвратный характеристический многочлен (т.е. $\chi(t) = t^{2n}\chi(t^{-1})$, где $2n$ — это размерность пространства).

§5. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы изучим структуру векторного пространства V с симметричной билинейной формой B над любым полем характеристики $\neq 2$.

5.1. Определение. *Функция от одного аргумента*

$$q:\ V \longrightarrow k:\quad v \longmapsto q(v) \in k$$

*называется **квадратичной формой**, если в координатах относительно какого-либо базиса эту функцию можно представить однородным многочленом степени 2.*

Задача 7.27. Убедитесь, что свойство функции быть квадратичной формой не зависит от выбора базиса, а также что квадратичные формы составляют векторное пространство размерности $n(n+1)/2$, если $\dim V = n$.

5.2. Поляризация квадратичных форм.

5.2.1. Утверждение. *Отображение, сопоставляющее всякой симметричной билинейной форме $B(\cdot,\cdot)$ на пространстве V функцию*

$$q_B : V \longrightarrow k : \quad v \longmapsto q_B(v) \overset{\text{def}}{=} B(v,v) \in k ,$$

является линейным изоморфизмом между пространством билинейных симметричных форм и пространством квадратичных форм на V.

Доказательство. Наше отображение являетяся, очевидно, линейным оператором между пространствами одинаковой размерности, поэтому достаточно будет проверить его инъективность. Чтобы сделать это, заметим, что симметричная билинейная форма $B(v,w)$ может быть восстановлена по своему образу q_B по формуле

$$B(v,w) = \frac{1}{2}\Big(q_B(v+w) - q_B(v) - q_B(w)\Big) .$$

Из этой формулы немедленно вытекает импликация $q_B = 0 \Longrightarrow B = 0$. □

В качестве следствия мы получаем, что для всякой квадратичной формы $q(v)$ на V существует единственная симметричная билинейная форма $B_q(v,w)$, из которой эта квадратичная форма получается «ограничением на диагональ в $V \times V$»: $q(v) = B_q(v,v)$. Билинейная форма B_q называется *поляризацией* q. Из доказательства предложения вытекает, что поляризацию можно вычислять по явной формуле

$$B_q(v,w) = \frac{1}{2}\Big(q(v+w) - q(v) - q(w)\Big) .$$

Задача 7.28. Найдите матрицу Грама поляризации квадратичной формы

$$q(x) = \sum_{i \leqslant j} a_{ij} x^i x^j .$$

Мы видим, таким образом, что симметричные билинейные формы и квадратичные формы — это два эквивалентных языка для описания одного и того же алгебраического явления. В дальнейшем мы будем свободно переходить с одного языка на другой без подробных комментариев.

5.3. Теорема. (Теорема Лагранжа) *Над полем характеристики $\neq 2$ любая (даже, возможно, вырожденная) симметричная билинейная форма в подходящем базисе будет иметь диагональную матрицу Грама. При этом число ненулевых диагональных элементов от выбора такого базиса не зависит (и равно рангу формы).*

Терминологическое замечание: всякий базис, удовлетворяющий условиям теоремы, называется *ортогональным*.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $V = 0$ или форма нулевая, то доказывать нечего. Если форма ненулевая, то ненулевой будет и соответствующая квадратичная форма, т.е. $\exists v \in V : \; B(v,v) \neq 0$. Тогда $\varrho_B(v) \neq 0$ и

$$\operatorname{Ann} \varrho_B(v) = \{w \in V \mid B(w,v) = 0\} \subset V$$

будет подпространством коразмерности 1, трансверсальным вектору v. По предположению индукции в этом подпространстве существует ортогональный базис для ограничения B. Добавляя к этому базису вектор v, получим ортогональный базис для B в V. □

5.3.1. Следствие. *Над алгебраически замкнутым полем всякая квадратичная форма линейной заменой координат приводится к сумме квадратов*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2,$$

количество которых равно рангу формы и не зависит от способа приведения.

5.3.2. Следствие. *Над полем вещественных чисел всякая квадратичная форма линейной заменой координат приводится к виду*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2,$$

в котором число слагаемых не зависит от способа приведения и равно рангу формы.

Задача 7.29. Каков диагональный вид формы на гиперболическом пространстве H_{2m}?

5.4. Определение. *Пространство с невырожденной квадратичной формой называется анизотропным, если оно не содержит ненулевых изотропных подпространств.*

Анизотропность равносильна отсутствию ненулевых изотропных векторов, т.е. эквивалентна условию $B(v,v) = 0 \Longrightarrow v = 0$.

Задача 7.30. Убедитесь, что над полем вещественных чисел анизотропны только положительно определённые и отрицательно определённые квадратичные формы (последние определяются условием $q(v) < 0\ \forall v \neq 0$).

Таким образом, при работе над произвольным полем анизотропность можно воспринимать как заменитель свойства положительной (или отрицательной) *определённости* вещественной формы.

5.4.1. Утверждение. *Всякое пространство с симметричной билинейной формой распадается в прямую ортогональную сумму ядра формы, гиперболического пространства и анизотропного пространства.*

Доказательство. Как мы уже видели в n° 1.6.2, пространство V с формой B является прямой ортогональной суммой $V = R \oplus U$ ядра $R = \ker B$ и любого дополнительного к нему подпространства U, причём ограничение формы на U невырождено. Поэтому достаточно доказать, что всякое пространство U с невырожденной формой есть прямая ортогональная сумма гиперболического и анизотропного подпространств. Докажем это индукцией по $\dim U$.

Если U само анизотропно (а это так при $\dim U = 1$), то доказывать нечего. Если в U есть ненулевой изотропный вектор u, то вследствие невырожденности формы существует вектор u', такой что $B(u', u) = b \neq 0$. Линейная оболочка u и u' представляет собой гиперболическую плоскость H_2.

Действительно, равенство

$$B(u' + \lambda u, u' + \lambda u) = B(u', u') + 2b\lambda$$

показывает, что без изменения линейной оболочки можно заменить u' на изотропный вектор $w = u' - \dfrac{B(u',u')}{2b}u$. Так как $B(w,u) = B(u',u) = b$, вектор w можно заменить на пропорциональный вектор $v = b^{-1}w$. В базисе $\{u,v\}$ матрица Грама ограничения формы B будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, что и требовалось.

Так как гиперболическая плоскость невырождена, мы получаем ортогональное разложение $U = H_2 \oplus H_2^{\perp}$, причём ограничение формы на $H_2^{\perp}$ невырождено. По индукции $H_2^{\perp}$ является прямой ортогональной суммой гиперболического и анизотропного пространства. Но тогда это верно и для U, ибо прямая ортогональная сумма гиперболических пространств H_{2m} и H_{2l} является гиперболическим пространством $H_{2(m+l)}$. $\square$

5.4.2. Пример. Пусть квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2,$$

в котором, скажем, число плюсов p не меньше числа минусов m. Тогда ядром такой формы является линейная оболочка тех координат $x_{p+m+1}, \dots, x_n$, которые не присутствуют в формуле. В качестве гиперболического ортогонального слагаемого можно взять линейную оболочку координат $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$, а в качестве анизотропного ортогонального слагаемого можно взять линейную оболочку остальных координат $x_{m+1}, \dots, x_p$.

5.5. Отражения. Пусть V —пространство с невырожденной симметричной билинейной формой B, и $v \in V$ — любой анизотропный вектор. Тогда V распадается в прямую ортогональную сумму $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$, где $k\cdot$ — одномерное подпространство, натянутое на вектор v, а $\langle v \rangle^{\perp} = \operatorname{Ann} \varrho_B(v) = \{w \in V \mid B(w,v) = 0\}$ — его ортогональное дополнение, причём ограничение формы на оба подпространства невырождено. Линейный оператор $\sigma_v : V \longrightarrow V$, который меняет знак у v и тождественно действует на $\langle v \rangle^{\perp}$, называется *отражением в гиперплоскости* $\langle v \rangle^{\perp}$.

Задача 7.31. Убедитесь, что $\forall w \in V$

$$\sigma_v(w) = w - 2\frac{B(w,v)}{B(v,v)}v.$$

Задача 7.32. Убедитесь, что отражение обратно само себе и является изометрией.

Задача 7.33. Пусть $F : V \longrightarrow V$ — изометрия. Удостоверьтесь, что $\sigma_{Fv} = F\sigma_v F^{-1}$.

5.5.1. Лемма. *В пространстве с невырожденной симметричной формой для любых двух различных векторов u, v, таких что $B(u,u) = B(v,v) \neq 0$, существует отражение, переводящее u либо в v либо в $-v$.*

Доказательство. Можно считать, что u и v неколлинеарны, т.к. иначе $u = \pm v$ и таковым отражением будет $\sigma_v = \sigma_u$.

Итак, пусть на u и v можно натянуть невырожденный параллелограмм (а точнее — ромб). Геометрически очевидно, что искомое отражение надо делать относительно одной из диагоналей этого ромба.

Формально: векторы $e_1 = u + v$ и $e_2 = u - v$ ортогональны (ибо $B(e_1,e_2) = B(u,u) - B(v,v) = 0$) и порождают то же подпространство, что и u и v, а значит хоть один из них да анизотропен. Если это e_2, то σ_{e_2} переводит в себя e_1 и меняет знак у e_2, т.е. переводит

$u = (e_1 + e_2)/2$ в $v = (e_1 - e_2)/2$. Если анизотропен e_1, то аналогично получаем, что σ_{e_1} переводит u в $-v$. □

5.5.2. Следствие. (из доказательства) *Если в условии леммы предположить дополнительно, что пространство анизотропно, то можно подобрать отражение, переводящее u в точности в v.*

5.5.3. Следствие. *Всякая изометрия n-мерного пространства с невырожденной симметричной формой является композицией не более $2n$ отражений.*

Доказательство. Индукция по размерности. Изометрия одномерного пространства либо тождественна, либо является отражением $-E$. Пусть теперь $V \xrightarrow{F} V$ — изометрия многомерного пространства. Рассмотрим произвольный анизотропный вектор v и отражение σ, которое переводит v в Fv или $-Fv$. Композиция σF переводит тогда v в $\pm v$, а значит переводит в себя ортогональную v гиперплоскость. По предположению индукции, ограничение σF на эту гиперплоскость является композицией не более чем $2n-2$ отражений. Поэтому $F = \sigma\sigma F$ является самое большее композицией $2n-1$ отражений и ещё, может быть, одного отражения σ_{Fv}. □

> Задача 7.34. Докажите, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией не более чем n отражений.

5.6. Теорема. (Теорема Витта) *Пусть U, V. W — три пространства с невырожденными симметричными билинейными формами. Если существует изометрический изоморфизм прямой ортогональной суммы $U \oplus V$ с прямой ортогональной суммой $U \oplus W$, то существует изометрический изоморфизм V с W.*

Доказательство. Индукция по $\dim U$. Если $U = 0$, то доказывать нечего. Если $U = \langle u \rangle$ — одномерно, то u анизотропен. Пусть $F : \langle u \rangle \oplus V \longrightarrow \langle u \rangle \oplus W$ — изометрия. Подберём отражение σ второго пространства, переводящее Fu в $\pm u$. Тогда изометрия σF переводит $\langle u \rangle$ в $\langle u \rangle$, а значит индуцирует искомую изометрию ортогональных дополнений.

В общем случае разложим U в прямую ортогональную сумму $U = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^\perp$, где u — любой анизотропный вектор. Применяя предположение индукции к $U = \langle u \rangle$ получим изометрический изоморфизм $\langle u \rangle^\perp \oplus V$ с $\langle u \rangle^\perp \oplus W$. Ещё раз применяя индуктивное предположение с $U = \langle u \rangle^\perp$, получаем искомую изометрию V с W. □

5.6.1. Следствие. *Если пространства V и W с невырожденными формами изометрически изоморфны, то всякое изометрическое вложение в W произвольного подпространства $U \subset V$, на которое форма с V ограничивается невырожденно, можно продолжить до изометрии всего V на W.*

Доказательство. По теореме Витта существует изометрический изоморфизм между ортогональным дополнением до U в V и ортогональным дополнением до образа U в W. Этот изоморфизм и продолжит заданное вложение.

5.6.2. Следствие. *Разложение пространства с симметричной билинейной формой в прямую ортогональную сумму ядра, гиперболического и анизотропного подпространств единственно с точностью до изометрического изоморфизма, тождественного на ядре (иными словами анизотропная и гиперболическая составляющие одного разложения переводятся в* *соответствующие составляющие любого другого разложения подходящим изометрическим изоморфизмом объемлющего пространства).*

Доказательство. Пусть $R \oplus H_{2m} \oplus A = R \oplus H_{2l} \oplus A'$ — два разложения, и пусть $m \le l$. Проекция вдоль R устанавливает изометрический изоморфизм $H_{2m} \oplus A$ с $H_{2l} \oplus A'$. По теореме Витта тогда должен существовать изометрический изоморфизм A с $H_{2(l-m)} \oplus A'$, что из-за анизотропности A возможно лишь при $H_{2(l-m)} = 0$, т.е. при $m = l$. Но тогда существует изометрический изоморфизм A с A'. Его прямая сумма с тождественным отображением на R и изометрическим отождествлением гиперболических подпространств будет искомой изометрией, переводящей одно разложение в другое.

5.6.3. Следствие. *Всякое гиперболическое подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой может быть переведено в любое другое гиперболическое подпространство той же размерности подходящей изометрией объемлющего пространства.*

Из этого следствия и задачи

> Задача 7.35. Докажите, что всякое m-мерное изотропное подпространство в пространстве V с невырожденной симметричной формой содержится в гиперболическом подпространстве $H_{2m} \subset V$.

вытекает

5.6.4. Следствие. *Любое изотропное подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой переводится в любое другое изотропное подпространство той же размерности при помощи подходящей изометрии объемлющего пространства.*

5.6.5. Следствие. *Любая квадратичная форма над полем характеристики $\neq 2$ в подходящих координатах может быть записана в виде*

$$q(x) = x_1x_{i+1} + x_2x_{i+2} + \cdots + x_ix_{2i} + a(x_{2i+1}, \ldots, x_r),$$

в котором число r участвующих переменных равно рангу формы и не зависит от выбора координат, число i парных произведений равно размерности максимального изотропного подпространства и также не зависит от выбора координат, а форма a от оставшихся $r-2i$ переменных анизотропна и определяется однозначно с точностью до изометрии пространства $k^{(r-2i)}$.

5.7. Вещественные формы. Вещественная квадратичная форма на n-мерном пространстве, как мы видели, может быть линейной заменой координат преобразована к виду

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2,$$

Пусть для определённости число плюсов p не меньше числа минусов m. Заменяя $x_i^2 - x_{p+i}^2$ на $(x_i + x_{p+i})(x_i - x_{p+i}) = y_iy_{p+i}$ и полагая $y_\nu = x_\nu$ при $\nu = (m+1), (m+2), \ldots, p$ и $\nu > (p+m)$ получаем разложение в сумму гиперболической и анизотропной форм:

$$q(y) = h_{2m}(y) + \alpha_{p-m}(y)\ ,$$

где

$$h_{2m}(y) = y_1y_{p+1} + \cdots + y_my_{p+m}\ , \quad \text{а} \quad \alpha_{p-m}(y) = y_{m+1}^2 + \cdots + y_p^2\ .$$

Мы получаем, в частности, что размерность максимального изотропного подпространства для такой формы равна $n-p$ (а в общем случае $n-\max(p,m)$). Размерность ядра такой формы равна $n-p-v$. Следовательно числа p и m положительных и отрицательных квадратов в диагональном представлении вещественной формы не зависят от способа проиведения формы к диагональному виду. Они называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции* формы q. Другая их инвариантная характеризация доставляется задачей

Задача 7.36. Докажите, что положительный индекс инерции равен наибольшей из размерностей таких подпространств, на которые форма ограничевается в положительно определённую форму, а отрицательный индекс инерции равен наибольшей из размерностей таких подпространств, на которые форма ограничевается в отрицательно определённую форму.

Как правило, индексы инерции невырожденной симметричной формы можно определить по любой её матрице Грама без явного построения ортогонального базиса. Для этого рассматривают последовательность *главных угловых миноров*

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n \qquad \text{где} \quad n=\dim V \tag{5-3}$$

(по определению, $\Delta_0 \overset{\text{def}}{=} 1$, а Δ_k — это минор матрицы Грама, расположенный в первых k строках и первых k столбцах).

5.7.1. Пример: Пусть последовательноть главных угловых миноров (5-3) симметричной билинейной формы на четырёхмерном пространстве такова, что

$$\Delta_1<0\ ,\quad \Delta_2=0\ ,\quad \Delta_3<0\ ,\quad \Delta_4>0\ .$$

Для нахождения диагонального вида этой формы заметим, что т.к. ограничение формы на линейную оболочку первых двух базисных векторов вырождено, в этой линейной оболочке имеется изотропный вектор. Следовательно, в линейной оболочке первых трёх базисных базисных векторов содержится гиперболическая плоскость, и (невырожденное) ограничение формы на это трёхмерное пространство имеет диагональный вид $(1,-1,1)$ или $(1,-1,-1)$. Поскольку $\Delta_3<0$ второй случай невозможен. Т.к. $\Delta_4>0$ получаем, что искомый диагональный вид нашей формы на всём пространстве есть $(1,-1,1,-1)$.

Задача 7.37. (Критерий Сильвестра) Докажите, что если все главные угловые миноры матрицы Грама ненулевые, то отрицательный индекс инерции равен числу перемен знака при прочтении последовательности (5-3) слева направо.

В заключение ещё одна задача в «перпендикулярном» направлении.

Задача 7.38. Докажите, что над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ существуют только две (с точностью до изоморфизма) анизотропные формы — одномерные формы x^2 и ηx^2, где η — какой-либо квадратичный невычет (см. лекции первого семестра) по модулю p. Выведите отсюда, что всякая невырожденная квадратичная форма над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ приводится к виду $x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2+\eta x_n^2$, где η равен единице при чётных n, а при нечётных n равен либо 1, либо какому-либо фиксированному квадратичному невычету.

Указание: Надо доказать, что всякая форма на пространстве размерности $\geqslant 2$ обладает изотропным вектором. Теорема Лагранжа сводит всё дело к доказательству того, что форма $x_1^2+\alpha x_2^2$ обладает изотропным вектором. Это проверяется при помощи принципа Дирихле.