Лекция 4
Собственные векторы и комплексификация

▷Собственные векторы и собственные значения ▷Характеристический многочлен ▷Трансверсальность собственных подпространств ▷Комплексификация и овеществление ▷Вещественная геометрия комплексных собственных векторов ▷Сравнение вещественной и комплексной линейности: условия Коши-Римана ▷Комплексная и вещественная структуры ▷Кватернионы

Основной темой нескольких ближайших лекций будет исследование строения линейных операторов, действующих на фиксированном векторном пространстве, и в частности, приведение операторов к разного рода «стандартным формам» при помощи подходящего выбора базиса. И хотя все эти вопросы могут быть переформулированы в терминах линейных уравнений, которые, казалось бы, одинаково хорошо решаются над любым полем, в случае алгебраически замкнутого поля теория получается гораздо более прозрачной. Причина этого частично прояснится в следующем параграфе.

§1. Собственные векторы

1.1. Проблема диагонализуемости оператора. Безусловно, простейшими линейными операторами на векторном пространстве V над полем k являются гомотетии

$$\lambda E : V \longrightarrow V : v \mapsto \lambda v , \quad \text{где } \lambda \in k \text{ — константа}$$

(здесь и далее через E мы будем обозначать как единичную матрицу, так и тождественный оператор). Следующими по сложности своего устройства являются *диагонализуемые* операторы, которые в некотором базисе записываются диагональной матрицей. Увы, не всякий оператор диагонализуем.

Задача 4.1. Докажите, что оператор d/dx на пространстве многочленов степени $\le n$ и оператор поворота евклидовой плоскости на угол $\ne \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не диагонализуемы.

При исследовании диагонализуемости важнейшую роль играет следующее понятие.

1.2. Определение. *Пусть $F: V \longrightarrow V$ — линейный оператор. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным для F, если $Fv = \lambda v$ для некоторого числа $\lambda \in k$, которое называется собственным значением оператора F.*

1.3. Характеристический многочлен. Итак, для того, чтобы диагонализовать оператор, мы должны построить в V базис из его собственных векторов. Чтобы выяснить, имеет ли F собственный вектор v с собственным значением λ, выберем в V базис $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и запишем F матрицей F_e. Тогда столбец координат v должен быть нетривиальным решением системы однородных линейных уравнений $F_e v = \lambda v$ или $(\lambda E - F_e)v = 0$. В первом семестре мы видели, что наличие нетривиального решения у такой системы равносильно условию $\det(\lambda E - F_e) = 0$. Функция

$$\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - F_e)$$

является многочленом степени $\dim V$ от t. Он называется *характеристическим многочленом* оператора F, поскольку не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица F_e. В самом деле, если $\tau = eC_{e\tau}$ — другой базис, то $F_\tau = C_{\tau e} F_e C_{e\tau} = C_{e\tau}^{-1} F_e C_{e\tau}$ и

$$\begin{aligned}
&\det(tE - F_e) = \\
&\quad = \det(tE - C_{e\tau}^{-1} F_e C_{e\tau}) = \det(C_{e\tau}^{-1}(tE - F_e)C_{e\tau}) = \det C_{e\tau}^{-1} \det(tE - F_e) \det C_{e\tau} = \\
&\qquad\qquad = \det(tE - F_e)\,.
\end{aligned}$$

Мы доказали

1.3.1. Утверждение. *Число $\lambda \in k$ тогда и только тогда является собственным числом оператора F, когда оно является корнем его характеристического многочлена $\chi_F(t)$.*

1.3.2. Следствие. *В пространстве над алгебраически замкнутым полем любой оператор обладает хотя бы одним собственным вектором.*

Поскольку коэффициент σ_k характеристического многочлена

$$\chi_F(t) = \det(tE - F) = \sigma_0 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_{n-1} t^{n-1} + t^n$$

равен взятой со знаком $(-1)^{n-k}$ сумме всех главных миноров[1] порядка $n - k$ матрицы оператора F, мы получаем, что эта сумма не зависит от выбора базиса, т.е. является инвариантом матрицы оператора. В частности, инвариантом будет *след* оператора F:

$$\vartriangle(F) = \sum f_{\nu\nu} = -\sigma_{n-1}$$

(сумма всех элементов на главной диагонали матрицы $F_e = (f_{ij})$).

Задача 4.2. Докажите, что след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей (иная формулировка: $\vartriangle(AB - BA) = 0 \ \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$).

1.4. Подпространства, порождённые собственными векторами. Подпространство $W \subset V$, которое переходит в себя под действием оператора $F: V \longrightarrow V$, называется *инвариантным подпространством*. В частности, инвариантным будет всякое подпространство W,

[1] Минор называется *главным*, если его главная диагональ находится на главной диагонали матрицы.

порождённое каким-либо набором $v_1, v_2, \ldots, v_m$ собственных векторов оператора F. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения этих векторов, то композиция

$$(F - \lambda_1 E)(F - \lambda_2 E) \cdots (F - \lambda_m E)$$

будет переводить всё W в ноль. Из этого следует, что всякий собственный вектор w оператора F, лежащий в W, может иметь в качестве собственного значения μ лишь одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, т.к.

$$0 = (F - \lambda_1 E)(F - \lambda_2 E) \cdots (F - \lambda_m E)w = (\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2) \cdots (\mu - \lambda_m)w.$$

Тем самым, справедливо

1.4.1. Утверждение. *Набор собственных векторов с попарно разными собственными значениями всегда линейно независим.*

1.4.2. Следствие. *Если характеристический многочлен оператора имеет* $\dim V$ *попарно-разных корней, то оператор диагонализуем.*

Пример тождественного оператора E с $\chi_E(t) = (t-1)^{\dim V}$ показывает, что это условие отнюдь не необходимо.

Все собственные векторы, имеющие одно и то же собственное значение λ составляют, как легко видеть, подпространство в V. Оно называется *собственным подпространством*, отвечающим собственному значению λ, и обозначается V_λ. Из предыдущего вытекает, что сумма всех собственных подпространств является прямой (но, возможно, не совпадает со всем пространством).

1.5. Пример: изометрии трёхмерного евклидова пространства. Линейный оператор в евклидовом пространстве V называется *изометрией*, если он сохраняет длину векторов:

$$||F(v)|| = ||v|| \quad \forall v \in V.$$

Формула $2(v, w) = (||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$ показывает, что изометрия сохраняет не только длину, но и скалярное произведение:

$$(Fv, Fw) = (v, w) \quad \forall v, w \in V,$$

а стало быть, переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис. Поэтому изометрический оператор в ортонормированном базисе задаётся ортогональной матрицей. В частности, определитель изометрии равен либо $+1$, либо -1. В первом случае изометрия называется *собственной*, во втором — *несобственной*.

Если V — двумерная плоскость, то, записывая матрицу изометрии в ортонормальном базисе в виде

$$C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C^{-1} = C^t,$$

в случае $\det C = 1$ находим

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{откуда} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

В случае $\det C = -1$ получаем

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{откуда} \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 = 1$$

Полагая $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, мы можем записать эти изометрии, соответственно, матрицами

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Первая из них задаёт поворот, а вторая (см.рис. 4–А) — симметрию относительно бисектриссы угла между векторами e_1 и Fe_1. Следовательно, вторая матрица заменой ортогонального базиса приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в чём можно убедиться и чисто алгебраически — вычисляя характеристический многочлен

$$\chi_F(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

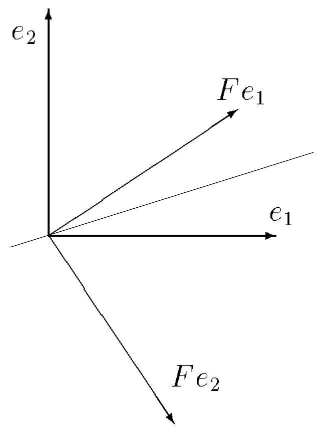

Рис. 4–А. Несобственная изометрия

Мы получаем

1.5.1. Утверждение. *Собственная изометрия плоскости является поворотом, а несобственная — осевой симметрией.*

Поскольку кубический многочлен над полем действительных чисел всегда имеет корень, изометрия трёхмерного пространства обладает собственным вектором e_1 (который можно выбрать с $||e_1|| = 1$), а так как изометрия сохраняет длину, собственное значение у e_1 обязано быть равным ± 1. Плоскость, перпендикулярная e_1 будет переходить в себя (т.к. изометрия сохраняет скалярное произведение), и в ней будет индуцироваться поворот или осевая симметрия. Сопоставление всех этих возможностей друг с другом доказывает

1.5.2. Утверждение. *Ссобственная изометрия трёхмерного пространства является поворотом вокруг некоторой прямой, а несобственная — композицией такого поворота с отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота. В подходящем ортонормальном базисе они могут быть записаны матрицами:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить аналогичные результаты и о других классах пространств и операторов нам надо более внимательно изучить связь между вещественной и комплексной геометрией, чему и будет посвящён остаток лекции.

§2. Комплексификация

Если задана система линейных уравнений с вещественными коэффициентами, то решение этой системы можно искать не только в $\mathbb{R}^n$, но и в $\mathbb{C}^n$, причём в последнем случае при преобразовании уравнений можно пользоваться умножением на комплексные числа. Эта процедура называется *окомплексиванием* векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

2.1. Построение $\mathbb{C}\otimes V$. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим *прямую сумму* $V\oplus V$, т.е. множество пар

$$\{(v_1,v_2)\mid v_1,v_2\in V\}$$

с покомпонентными операциями сложения и умножения на числа. Вместо (v_1,v_2) мы по традиции будем писать v_1+iv_2, а вместо $V\oplus V$ — $V\oplus iV$, где i — это формальный атрибут, приписываемый к векторам из второго слагаемого для того, чтобы отличать их от векторов из первого слагаемого (подчеркну, что равенство $v_1+iv_2=w_1+iw_2$ означает, по определению, пару равенств $v_1=w_1$ и $v_2=w_2$).

Определим теперь на пространстве $V\oplus iV$ умножение на комплексные числа по формуле

$$(x+iy)\cdot(v_1+iv_2)\overset{\text{def}}{=}(xv_1-yv_2)+i(yv_1+xv_2)\in V\oplus iV,$$

где $z=x+iy\in\mathbb{C},\ v_1+iv_2\in V\oplus iV$.

> Задача 4.3. Убедитесь, что такое умножение наделяет $V\oplus iV$ структурой векторного пространства над полем $\mathbb{C}$ (т.е. проверьте выполнение аксиом ассоциативности и дистрибутивности для умножения векторов на комплексные числа).

Пространство $V\oplus iV$, рассматриваемое как пространство над полем $\mathbb{C}$, называется *комплексификацией* вещественного векторного пространства V и обозначается $\mathbb{C}\otimes V$. Векторы $v\in V\subset\mathbb{C}\otimes V$ называются *вещественными*, а векторы вида iv (где $v\in V\subset\mathbb{C}\otimes V$) — *чисто мнимыми*.

2.1.1. Утверждение. *Размерность комплексного векторного пространства $\mathbb{C}\otimes V$ равна размерности вещественного векторного пространства V, и любой базис V над $\mathbb{R}$ будет базисом $\mathbb{C}\otimes V$ над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если векторы $e_1,e_2,\dots,e_n$ составляют базис в V над полем $\mathbb{R}$, то векторы $e_1,e_2,\dots,e_n, ie_1,ie_2,\dots,ie_n$ составят базис над $\mathbb{R}$ в $V\oplus iV$. Поэтому $\forall w\in V\oplus iV$ существует и единственно разложение

$$w=\sum x^\nu\cdot e_\nu+\sum y^\nu\cdot ie_\nu$$

с вещественными x^ν, y^ν. Но по определению операции умножения на комплексные числа это равносильно существованию и единственности разложения над $\mathbb{C}$:

$$w=\sum(x^\nu+iy^\nu)\cdot e_\nu=\sum z^\nu\cdot e_\nu$$

с $z^\nu=x^\nu+iy^\nu\in\mathbb{C}$. □

Чтобы уточнить, над каким полем вычисляется размерность того или иного пространства, символ этого поля указывают в качестве индекса у dim. К примеру, из предыдущего предложения получаем равенство

$$\dim_{\mathbb{R}}(V)=\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\otimes V).$$

Базисы $\mathbb{C}\otimes V$, происходящие из базисов V, называются *вещественными*. Разумеется, в $\mathbb{C}\otimes V$ имеется много и невещественных базисов (можно даже сказать что «общий» базис является именно невещественным!).

> Задача 4.4. Пусть векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ составляют (возможно, невещественный) базис $\mathbb{C}\otimes V$ над $\mathbb{C}$. Докажите, что векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $iv_1, iv_2, \ldots, iv_n$ составят базис $\mathbb{C}\otimes V$ над $\mathbb{R}$.

2.2. Комплексификация оператора. Если $F:\ V\longrightarrow V$ — линейный оператор, то его можно *продолжить по линейности* до комплексно-линейного оператора

$$F_{\mathbb{C}}:\ \mathbb{C}\otimes V\longrightarrow \mathbb{C}\otimes V,$$

полагая $F_{\mathbb{C}}(v_1+iv_2)\stackrel{\text{def}}{=}F(v_1)+iF(v_2)\in V\oplus iV$.

> Задача 4.5. Убедитесь, что $F_{\mathbb{C}}(zw)=zF_{\mathbb{C}}(w)\quad \forall z\in\mathbb{C}$ и $\forall w\in\mathbb{C}\otimes V$.

2.2.1. Пример. Пусть $V=\mathbb{R}^2$ и $F=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ — поворот на угол φ. Тогда $\mathbb{C}\otimes V=\mathbb{C}^2$ и в стандартном базисе $F_{\mathbb{C}}$ будет задаваться той же матрицей, что и F. Её характеристический многочлен $\chi_{F_{\mathbb{C}}}(t)=t^2-2\cos\varphi\cdot t+1$ имеет два различных комплексных корня $\lambda_1=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$ и $\lambda_2=\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}={\lambda_1}^{-1}=\bar\lambda_1$, и значит, в $\mathbb{C}^2$ можно выбрать базис, в котором $F_{\mathbb{C}}$ запишется диагональной матрицей $\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}$.

> Задача 4.6. Напишите матрицу координат векторов этого базиса в стандартном базисе $\mathbb{C}^2$.

Этот пример иллюстрирует общий принцип: у комплексифицированного оператора $F_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}\otimes V$ больше собственных векторов, чем у исходного F на V. Поскольку операторы, обладающие большим количеством собственных векторов, изучать проще, стандартная программа исследования свойств вещественного линейного оператора состоит в том, чтобы сначала изучить свойства его комплексификации, а затем «спустить» их в исходное вещественное пространство. На этом последнем шаге в игру вступает тот факт, что у вещественного оператора характеристический многочлен имеет вещественные коэффициенты, а стало быть его невещественные корни естественно группируются в пары.

2.2.2. Утверждение. *Пусть $F:\ V\longrightarrow V$ — линейный оператор на вещественном векторном пространстве и $F_{\mathbb{C}}:\ \mathbb{C}\otimes V\longrightarrow\mathbb{C}\otimes V$ — его комплексификация. Вектор $w=v_1+iv_2\in\mathbb{C}\otimes V$ с $v_1,v_2\in V$ тогда и только тогда будет собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\lambda=a+ib=|\lambda|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\in\mathbb{C}$, когда вещественная линейная оболочка векторов v_1,v_2 в V будет инвариантным подпространством для F и действие F на этом подпространстве будет в образующих $\{v_1,v_2\}$ задаваться матрицей*

$$F=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=|\lambda|\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Доказательство. По определению $F_{\mathbb{C}}$ имеем:

$$F_{\mathbb{C}}(v_1+iv_2)=F(v_1)+iF(v_2)\,,\quad \text{где}\quad F(v_1),F(v_2)\in V.$$

Условие, что $v_1 + iv_2$ — собственный записывается в виде:

$$F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2).$$

Сравнивая компоненты вещественного прямого разложения $\mathbb{C} \otimes V = V \oplus iV$, немедленно получаем требуемую эквивалентность.

2.2.3. Следствие. *Всякий линейный оператор в вещественном векторном пространстве обладает двумерным инвариантным подпространством.*

2.2.4. Следствие. *Если вектор $w = v_1 + iv_2$ $(v_1, v_2 \in V)$ является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$, то сопряжённый вектор $\bar{w} = v_1 - iv_2$ также будет собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжённым собственным значением $\bar{\lambda}$. При этом комплексная линейная оболочка векторов $w, \bar{w}$ в $\mathbb{C} \otimes V$ будет совпадать с комплексификацией вещественной линейной оболочки векторов v_1, v_2 в V, а эта последняя будет инвариантным подпространством оператора F.*

2.2.5. Следствие. *Всякое собственное подпространство комплексифицированного оператора, отвечающее вещественному собственному значению, является комплексификацией вещественного собственного пространства той же размерности и с тем же собственным значением у исходного вещественного оператора.*

Задача 4.7. Докажите, что любая изометрия евклидова пространства в подходящем ортонормированном базисе может быть записана блочно-диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \boxed{\Pi(\varphi_1)} & & & & & & & \\ & \boxed{\Pi(\varphi_2)} & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \boxed{\Pi(\varphi_k)} & & & & \\ & & & & \pm 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где знак выбирается в соответствии с тем, является ли изометрия собственной, а через $\Pi(\varphi_\nu)$ обозначены 2×2-матрицы поворотов на углы $0 < \varphi_\nu < 2\pi$.

§3. Овеществление

Посмотрим теперь на предыдущую конструкцию под противоположным углом. Пусть W — n-мерное комплексное пространство. Поскольку $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, возможность умножать векторы пространства W на комплексные числа включает в себя возможность умножать их и на вещественные числа. Если мы примем во внимание только эту последнюю, забыв про умножение на невещественные комплексные числа, то преарвтим W в пространство над полем $\mathbb{R}$, которое называется *овеществлением* комплексного пространства W и обозначается $W_{\mathbb{R}}$. Подчеркну, что оно состоит из физически тех же векторов, что и W, и отличается от W только смыслом, который вкладывается в понятие *линейности* — вместо комплексной линейности мы начинаем рассматривать вещественную линейность.

3.1. Базисы и размерность. Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляли базис W над $\mathbb{C}$, то векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, $ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ составят базис $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Действительно, существование и единственность представления произвольного вектора $w \in W$ в виде

$$w = \sum z^\nu e_\nu$$

с комплексными $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$ равносильны существованию и единственности разложения

$$w = \sum x^\nu e_\nu + \sum y^\nu ie_\nu$$

с вещественными коэффициентами. Таким образом, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W$. Мы будем называть вещественный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, $ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ *ассоциированным* с комплексным базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$.

3.2. Сравнение линейных групп. Все обратимые линейные операторы $F: V \longrightarrow V$, действующие на векторном пространстве V над произвольным полем k, составляют группу, которая называется *полной линейной группой пространства V над полем k* и обозначается $GL_k(V)$ или просто $GL(V)$, если поле нет нужды уточнять. Фиксация в V базиса позволяет сопоставить каждому оператору его матрицу в этом базисе, что задаёт изоморфизм полной линейной группы с группой по умножению невырожденных квадратных матриц размера $n \times n$ (где $n = \dim V$). Эта группа обозначается $GL_n(k)$ или просто GL_n.

Вернёмся вновь к n-мерному комплексному пространству W и фиксируем в нём базис $\{e_\nu\}$ над полем $\mathbb{C}$, отождествив тем самым группу $GL_{\mathbb{C}}(W)$ комплексно-линейных операторов с группой $GL_n(\mathbb{C})$ комплексных невырожденных матриц размера $n \times n$. Аналогично, при помощи ассоциированного вещественного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, $ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ отождествим группу $GL_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ обратимых вещественно-линейных операторов с группой $GL_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $2n \times 2n$. Поскольку комплексно-линейные операторы являются также и вещественно-линейными, перезапись комплексного оператора в вещественном базисе определяет инъективный гомоморфизм групп $GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{2n}(\mathbb{R})$. Опишем образ этого гомоморфизма. Пусть $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W)$ задаётся в комплексном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ комплексной матрицей $Z = (z^\mu_\nu) = (x^\mu_\nu + iy^\mu_\nu) = X + iY$, где $X = (x^\mu_\nu)$, $Y = (y^\mu_\nu)$ — вещественные $n \times n$-матрицы. Тогда

$$F(e_\nu) = \sum z^\mu_\nu e_\mu = \sum x^\mu_\nu e_\mu + \sum y^\mu_\nu ie_\mu,$$

и, вследствие комплексной линейности F, $F(ie_\nu) = iF(e_\nu) = \sum -y^\mu_\nu e_\mu + \sum x^\mu_\nu ie_\mu$. Тем самым, переразложение комплексно-линейного оператора по вещественному базису будет блочной $2n \times 2n$-матрицей из $n \times n$-блоков

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \tag{3-1}$$

Задача 4.8. Проверьте, что и наоборот, всякий вещественно-линейный оператор такого вида перестановочен с умножением на комплексные числа.

Мы получаем

3.2.1. Утверждение. *Вещественно-линейный оператор на овеществлённом комплексном пространстве тогда и только тогда является образом комплексно-линейного, когда его матрица в вещественном базисе, ассоциированном с некоторым комплексным базисом, имеет* *блочный вид (3-1), при этом соответствующий комплексный оператор в комплексном базисе будет задаваться матрицей $X + iY$.*

3.3. Пример: условия Коши-Римана. Пусть $W = \mathbb{C}$. Тогда $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ и вещественным базисом, ассоциированным с комплексным базисом $\{1\} \subset \mathbb{C}$ будет базис $\{1, i\}$. Комплексно-линейные операторы в этом тривиальном случае — это в точности операторы умножения на какое либо комплексное число $z = a + ib$. В вещественном базисе такие (и только такие) операторы записываются матрицами

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Всякая функция $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ может быть описана на двух языках. Либо как функция $w = f(z)$ одной комплексной переменной, либо (после разделения вещественных и мнимых частей у $w = u + iv$ и $z = x + iy$) как пара функций

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

пары вещественных переменных.

Функция называется *комплексно-дифференцируемой*, если её приращение (как функции от одной комплексной переменной) приближается с точностью до высшего порядка малости комплексно-линейным оператором от приращения аргумента.

Вещественно-дифференцмруемое отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ (задаваемое парой функций от пары вещественных переменных) определяется аналогично, только линейность приращения при этом имеется в виду вещественная.

Несложно проверить, что операторы, задающие линейную часть приращения, имеют в этих двух случаях, соответственно, вид

$$\Delta z \longmapsto \frac{df}{dz} \cdot \Delta z \qquad \text{и} \qquad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

В анализе доказывается также, что если все четыре частные производные из правого соотношения существуют и непрерывны в некоторой области, то функция будет в этой области вещественно дифференцируемой. Сопоставляя это с предыдущими наблюдениями о матрицах комплексно-линейных операторов, мы заключаем, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций от пары вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно-дифференцируемую функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, когда выполняются *дифференциальные уравнения Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

§4. Комплексная и вещественная структуры

4.1. Вещественная структура. Пусть W — n-мерное пространство над полем $\mathbb{C}$. Если оно получено как результат комплексификации некоего вещественного векторного пространства

V, то на нём имеется дополнительная структура: его овеществление $W_{\mathbb{R}}$ разложено в прямую сумму вещественных векторных подпространств $W = V \oplus iV$. Наличие такого разложения иногда бывает удлбно переформулировать в терминах наличия на W линейного оператора со специальными свойствами.

4.1.1. Утверждение. *Для задания на комплексном векторном пространстве структуры комплексифицированного вещественного векторного пространства необходимо и достаточно указать такой вещественно-линейный оператор $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}})$, который бы удовлетворял условиям $\sigma^2 = E$ и $\sigma(iw) = -i\sigma(w)$.*

Терминологическое эамечание. В сочетании с вещественной линейностью последнее соотношение означает, что $\sigma(zw) = \bar{z}\sigma(w)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Это свойство называется *комплексной антилинейностью*. Оператор σ, удовлетворяющий условиям предложения, называется *оператором вещественной структуры* (или просто *вещественной структурой*) на комплексном пространстве W.
Доказательство. Если $W = \mathbb{C} \otimes V = V \oplus iV$, то в качестве σ надо взять оператор комплексного сопряжения векторов: $\sigma: \ v_1 + iv_2 \longmapsto v_1 - iv_2 \quad \forall v_1, v_2 \in V$.

Обратно, если на $W_{\mathbb{R}}$ имеется оператор σ с квадратом единица, то пространство $W_{\mathbb{R}}$ как вещественное пространство разлагается в прямую сумму вещественных подпространств

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}}^{+} &= \{w \in W_{\mathbb{R}} \mid \sigma w = w\} \\ W_{\mathbb{R}}^{-} &= \{w \in W_{\mathbb{R}} \mid \sigma w = -w\}, \end{aligned}$$

которые являются собственными подпространствами для σ, отвечающими собственным значениям ± 1. Действительно, эти подпространства пересекаются только по нулю, а их сумма порождает всё $W_{\mathbb{R}}$, т.к. любой вектор $w \in W_{\mathbb{R}}$ представим в виде $w = w_+ + w_-$ с

$$w_+ = \frac{w + \sigma w}{2} \in W_{\mathbb{R}}^{+} \quad \text{и} \quad w_- = \frac{w - \sigma w}{2} \in W_{\mathbb{R}}^{-}.$$

Задача 4.9. Докажите, что точно такое же разложение имеется для любого оператора с квадратом единица, действующего в любом векторном пространстве над любым полем, характеристка которого отлична от 2.

Далее, из условия $\sigma(iw) = -i\sigma(w)$ следует, что $w \in W_{\mathbb{R}}^{+}$ тогда и только тогда, когда $iw \in W_{\mathbb{R}}^{-}$. Действительно:

$$\sigma(iw) = -i\sigma(w) = -iw \iff \sigma(w) = w.$$

Значит, $W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}}^{+} \oplus iW_{\mathbb{R}}^{+}$, что и требовалось. □

4.2. Комплексная структура. Пусть теперь V — вещественное пространство, которое является овеществлением некоего комплексного пространства W. Такое пространство также обладает специальными свойствами, и это тоже можно сформулировать на операторном языке.

4.2.1. Утверждение. *Для того, чтобы на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ задать структуру комплексного векторного пространства, овеществлением которого оно является, необходимо и достаточно задать на V вещественно-линейный оператор I с $I^2 = -E$.*

Доказательство. Если $V = W_{\mathbb{R}}$ для некоторого векторного пространства W над полем $\mathbb{C}$, то в качестве оператора I выступает оператор умножения на комплексное число i.

Обратно, если задан $\mathbb{R}$-линейный оператор $I: V \longrightarrow V$ с $I^2 = -E$, то можно определить операцию умножения векторов из V на комплексные числа формулой $(x+iy)v \stackrel{\mathrm{def}}{=} xv + yI(v) \,\forall v \in V$.

Проверка аксиом умножения векторов на числа делается непосредственно. Дистрибутивность и действие единицы очевидны, а ассоциативность доказывается выкладкой:

$$z_1(z_2v) =$$
$$= (x_1+iy_1)(x_2v+y_2I(v)) = x_1x_2v + x_1y_2I(v) + y_1x_2I(v) + +y_1y_2I^2(v) =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2)v + (y_1x_2+x_1y_2)I(v) = \Big((x_1x_2-y_1y_2) + i(y_1x_2+x_1y_2)\Big)I(v) =$$
$$= (z_1z_2)v$$

Таким образом, V становится комплексным векторным пространством, а исходная структура пространства над полем $\mathbb{R}$ может быть получена как результат овеществления этого комплексного пространства. □

Оператор $I: \;I^2 = -E$ называется *оператором комплексной структуры* (или просто *комплексной структурой*) на вещественном векторном промтранстве V.

Задача 4.10. Докажите, что вещественно-линейный оператор на вещественном пространстве с комплексной структурой тогда и только тогда будет комплексно-линейным, когда он перестановочен с оператором комплексной структуры.

§5. Кватернионы

На вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ существует бесконечное семейство комплексных структур, параметризуемое точками стандартной двумерной сферы. Эти структуры красивейшим образом согласованы между собой в одну *гиперкомплексную* или так называемую *кватернионную* структуру.

5.1. Кватернионное умножение. Обозначим стандартные базисные векторы координатного вещественного пространства $\mathbb{R}^4$ через $1, i, j, k$, так что векторы $\mathbb{R}^4$ будут записываться в виде:
$$q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k.$$

Мы собираемся ввести на векторах q умножение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ так, чтобы оно было $\mathbb{R}$-билинейным оператором, т.е. удовлетворяло соотношениям

$$(\lambda q_1)q_2 = q_1(\lambda q_2) = \lambda(q_1q_2) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\,\forall q_1,q_2\in\mathbb{R}^4$$
$$\begin{array}{rcl} (q_1+q_2)q_3 &=& q_1q_3+q_2q_3 \\ q_1(q_2+q_3) &=& q_1q_2+q_1q_3 \end{array} \quad \forall q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R}^4.$$

Такое умножение однозначно определяется заданием девяти попарных произведений базисных векторов между собой. Мы определим их так, чтобы вектор 1 был двусторонней единицей для конструируемого умножения, квадраты остальных трёх базисных векторов были бы равны -1:
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

а попарные произведения были бы кососимметричны и вычислялись по правилам:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} ij &=& k && jk &=& i && ki &=& j \\ ji &=& -k && kj &=& -i && ik &=& -j \end{array}$$

(для их запоминания удобно ввести на множестве $\{i, j, k\}$ циклический порядок:

$$\cdots j < k < i < j < k < i < j \cdots ;$$

тогда произведение двух соседних букв равно следующей за ними со знаком «+», если первый сомножитель меньше второго, и со знаком «−» — в противном случае).

Продолжая эти правила по вещественной билинейности, мы получаем для произвольных двух

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad \text{и} \quad p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

следующую формулу для их произведения:

$$\begin{aligned} p \cdot q = \ & (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \ + \\ & + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\, i \ + \\ & + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\, j \ + \\ & + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\, k \end{aligned} \tag{5-2}$$

5.2. Определение. *Введённая только что операция на векторах $\mathbb{R}^4$ называется кватернионным умножением, а сами векторы — кватернионами.*

При рассмотрении кватернионов вместо $\mathbb{R}^4$ используется обозначение $\mathbb{H}$.

5.2.1. Ассоциативность и дистрибутивность. Из формул (5-2) видно, что как левое так и правое умножения на фиксированный кватернион являются линейным оператором на $\mathbb{R}^4$, из чего вытекает дистрибутивность умножения по отношению к сложению. Кватернионное умножение также ассоциативно. Благодаря билинейности проверка ассоциативности сводится к проверке ассоциативности перемножения базисных кватернионов, которую нетрудно сделать непосредственно.

Задача 4.11. Обязательно проделайте эту проверку!

5.3. Норма и сопряжение. Кватернионы из линейной оболочки векторов $i, j.k$ называются *чисто мнимыми*, а кватернионы, пропорциональные 1 — *вещественными*. Произвольный кватернион однозначно представляется в виде суммы вещественного и чисто мнимого кватернионов, называемых его вещественной и мнимой частями. Вещественно-линейный оператор, меняющий знак у всех мнимых кватернионов называется *кватернионным сопряжением* и обозначается чертой сверху, так что

$$\overline{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k} \stackrel{\text{def}}{=} q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k.$$

Легко усмотреть, что одновременная смена знака у p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 в формулах (5-2) равносильна перемене букв p и q между собой и смене знака у мнимой части произведения. Это выражается формулой

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = \overline{qp}.$$

Тем самым, сопряжение является *антигомоморфизмом* по отношению к умножению кватернионов, т.е. переводит произведения в произведения, вычисляемые в противоположной порядке.

Из написанной формулы следует, что кватернион $q\cdot\bar q$ не меняется при сопряжении: $\overline{q\cdot\bar q} = \bar{\bar q}\cdot\bar q = q\cdot\bar q$, а стало быть, является вещественным при любом $q\in\mathbb{H}$. Вычисляя вещественную часть $q\cdot\bar q$ по формуле (5-2), получаем: $q\cdot\bar q = \mathrm{Re}(q\cdot\bar q) = \sum q_\nu^2 = ||q||$, где под нормой понимается стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^4$. Из сказанного вытекает

5.3.1. Утверждение. *Стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^4$ мультипликативна относительно кватернионного умножения: $||pq|| = ||p||\cdot||q|| \quad \forall p,q\in\mathbb{H}$.*

Доказательство. $||pq||^2 = pq\cdot\overline{pq} = pq\bar q\bar p = p\,||q||^2\,\bar p = ||p||^2\,||q||^2$. □

5.3.2. Следствие. (Тождество Эйлера)

$$\begin{aligned}(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2) = \;& (x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)^2 + \\ &+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)^2 + \\ &+(x_0y_2+x_2y_0+x_3y_1-x_1y_3)^2 + \\ &+(x_0y_3+x_3y_0+x_1y_2-x_2y_1)^2\end{aligned}$$

Тождество Эйлера играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, поскольку редуцирует её к задаче о представимости простых чисел.

5.4. Деление. Множество, на элементах которого определены две бинарные операции (сложение и умножение), называется *телом*, если эти операции удовлетворяют всем аксиомам поля, за исключением коммутативности умножения[2].

Мы уже видели, что умножение кватернионов ассоциативно, дистрибутивно и обладает единицей. Из предыдущего предложения вытекает, что у каждого кватерниона $q\neq 0$ имеется двусторонний обратный

$$q^{-1} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{||q||^2}\cdot\bar q.$$

Мы получаем

5.4.1. Следствие. *Множество кватернионов $\mathbb{H}$ с операциями сложения векторов и кватернионного умножения является телом.*

Задача 4.12. Сколько решений имеет в $\mathbb{H}$ уравнение $q^2=-1$?

Задача 4.13. Убедитесь, что оператор умножения на любой мнимый кватернион с нормой единица является оператором комплексной структуры.

Задача 4.14. Убедитесь, что $\mathbb{H}$ может быть определено как множество формальных записей вида $q = z + wj$, где $z,w\in\mathbb{C}$, а умножение определяется по обычным правилам раскрытия скобок с учётом равенств:

$$j^2=-1 \qquad \text{и} \qquad zj = j\bar z \ \forall z\in\mathbb{C}.$$

[2]Говоря точнее, требуется, чтобы сложение удовлетворяло обычным аксиомам сложения векторов, а умножение было бы ассоциативно, возможно, некоммутативно, но аксиомы дистрибутивности, существования единицы и существования обратного элемента выполняются как для умножения на произвольный элемент слева так и для умножения справа.