Лекция 3
Евклидовы пространства

▷Метрики ▷Однородность и трансляционная инвариантность ▷Нормы ▷Шары и топология ▷Эквивалентность норм на конечномерном пространстве ▷Геометрическое задание нормы ▷Скалярное произведение ▷Ортогонализация Грама-Шмидта ▷Матрицы Грама и определители Грама ▷Неравенство Буняковского-Коши-Шварца ▷Евклидовы метрики ▷Углы ▷Евклидов объём ▷Ортогональное проектирование и вычисление расстояний

В этой лекции мы по-прежнему будем заниматься конечномерными аффинными и векторными пространствами над полем $\mathbb{R}$ и обсудим вопросы, связанные с измерением длин, углов и объёмов в таких пространствах.

§1. Метрики и нормы

Аксиоматизация свойств *расстояния* приводит к общему теоретико-множественному понятию *метрического пространства*.

1.1. Определение. *Множество X, называется метрическим пространством, если задана функция $\varrho: \ X\times X \longrightarrow \mathbb{R}: \ (x,y)\mapsto \varrho(x,y)$, которая называется расстоянием (или метрикой) и обладает свойствами:*

(i) симметричность: $\varrho(x,y)=\varrho(y,x) \qquad \forall x,y\in X$

(ii) положительность: $\varrho(x,y)\geq 0 \qquad \forall x,y\in X$

(iii) невырожденность: $\varrho(x,y)=0 \iff x=y$

(iv) неравенство треугольника: $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)\geq\varrho(x,z) \qquad \forall x,y,z\in X$

Если X — аффинное пространство, то, занимаясь аффинной геометрией на X, естественно рассматривать только метрики, согласованные с аффинной структурой на X. Геометрически эта структура проявляется в наличии на X *параллельных переносов* и *гомотетий*.

Метрика ϱ на аффинном пространстве X называется *инвариантной относительно сдвигов*, если

$$\varrho(x,y)=\varrho(x+v,y+v) \quad \forall x,y\in X \quad \text{и} \quad \forall v\in V_X.$$

Метрика называется *однородной*, если

$$\overrightarrow{xy} = \lambda \ \overrightarrow{pq} \implies \varrho(x,y) = |\lambda|\varrho(p,q).$$

Всюду далее мы будем рассматривать на аффинных просранствах только однородные и инвариантные относительно сдвигов метрики. Наличие такой метрики на аффинном пространстве X можно переформулировать в терминах векторного пространства V_X.

1.2. Определение. *Функция* $\|\cdot\| : \ V \longrightarrow \mathbb{R} : \ v \mapsto \|v\|$ *на вещественном векторном пространстве* V *называется* ***нормой***, *если она обладает свойствами:*

(i) положительность: $\|v\| \geq 0 \qquad \forall v \in V$

(ii) невырожденность: $\|v\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0$

(iii) однородность: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iv) неравенство треугольника: $\|v\| + \|w\| \geq \|v + w\| \quad \forall v \in V.$

1.3. Биекция между метриками и нормами. Если метрика ϱ на аффинном пространстве X инвариантна относительно сдвигов и однородна, то, полагая

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(x, x+v),$$

мы корректно определим функцию из V в $\mathbb{R}$ (поскольку правая часть не зависит от x из-за инвариантности ϱ). Сравнение свойств метрики и нормы немедленно показывает, что $\|\cdot\|$ будет нормой на V.

Задача 3.1. Проверьте это.

Обратно, любая норма $\|\cdot\|$ на V индуцирует инвариантную относительно сдвигов и однородную функцию от двух точек из $\mathrm{Aff}(V)$: $\varrho(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \| \ \overrightarrow{xy} \ \|$.

Задача 3.2. Убедитесь, что ϱ — метрика.

Таким образом, имеется биекция между нормами на V и инвариантными относительно сдвигов однородными метриками на $\mathrm{Aff}(V)$.

1.4. Другая форма неравенства треугольника. Мы записали неравенство треугольника в "геометрической" форме, однако иногда бывает удобен другой его вариант. Полагая $v = a$, $w = b - a$, получим $\|a\| + \|b-a\| \geq \|b\|$, или, перенося в другую часть, $\|b-a\| \geq \|b\| - \|a\|$. Меняя a и b местами и пользуясь тем, что $\|b-a\| = \|a-b\|$, получаем также, что $\|b-a\| \geq \|a\| - \|b\|$. Откуда окончательно $\|b - a\| \geq \Big|\|b\| - \|a\|\Big|$.

Задача 3.3. Проверьте, что это неравенство в действительности равносильно неравенству треугольника.

1.5. Шары и топология. Пусть X — метрическое пространство, и ε — вещественное положительное число. Будем называть ε-шаром с центром в точке $p \in X$ множество

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p,q) \leq \varepsilon\}.$$

Если X — аффинное пространство и метрика ϱ индуцирована нормой $\|\cdot\|$ на V_X, то шар можно описать как

$$B_\varepsilon(p) = \{q = p + v \mid \|v\| \leq \varepsilon, \ v \in V_X\}.$$

Если объявить в X *открытыми* те и только те подмножества, которые вместе с каждой своей точкой содержат и некоторый ε-шар с центром в этой точке, то мы зададим на X *топологию.*

Задача 3.4. Убедитесь, что из свойств метрики вытекает выполнение аксиом топологии для описанной системы открытых множеств.

Эта топология на метрическом пространстве называется *топологией, индуцированной метрикой.*

1.5.1. Пример: стандартная топология на $\mathbb{R}^n$. Если фиксировать в V базис $\{e_\nu\}$ с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, то функция

$$\|v\| = \|\sum x^i e_i\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_i |x^i|$$

будет, очевидно, нормой. ε-шар с центром в точке p, построенный относительно этой нормы, есть не что иное, как ε-куб с центром в p (см. прошлую лекцию).

$$B_\varepsilon(p) = Q(p,\varepsilon) = \{q \mid \quad |q^i - p^i| \le \varepsilon \quad \forall\, i = 1, \ldots, n\}\ .$$

Поэтому топология, индуцированная этой нормой, совпадает со *стандартной топологией* на $\mathbb{R}^n$, которую мы обсуждали в прошлой лекции. Мы будем называть норму $\max\limits_i |x^i|$ *стандартной* и обозначать $\|\cdot\|_{st}$.

§2. Свойства норм

2.1. Эквивалентность норм. Мы собираемся проверить, что на *конечномерном* векторном пространстве все нормы задают одну и ту же топологию[1]. Для бесконечномерных пространств *это неверно* и читателю очень поучительно будет проследить, где в наших рассуждениях будет использована конечномерность, а также построить бесконечномерные контрпримеры.

2.1.1. Лемма. *Произвольная норма на $\mathbb{R}^n$ непрерывна в стандартной топологии.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{st}$ — стандартная, а $\|\cdot\|$ — произвольная нормы, и пусть $M = \max\limits_i \|e_i\|$. Оценка

$$\|v\| = \|\sum x^i e_i\| \le \sum \|x^i e_i\| = \sum |x^i| \|e_i\| \le nM \max_i |x^i| = nM\|v\|_{st}$$

показывает, что при малых $\|v\|_{st}$ норма $\|v\|$ также мала: $\forall \varepsilon > 0$ при $\|v - w\|_{st} < \varepsilon/2nM$ получим

$$\Big|\|v\| - \|w\|\Big| \le \|v - w\| < nM\|v - w\|_{st} < \varepsilon\ ,$$

что и означает непрерывность функции $\|v\|$.

2.1.2. Следствие. *Для любой нормы $\|\cdot\|$ существуют вещественные положительные константы μ и M, такие, что $\forall v \in V \qquad \mu\|v\|_{st} \le \|v\| \le M\|v\|_{st}$.*

[1]Что, в частности, даст "обходное" решение зад.2.22 о независимости стандартной топологии от выбора координат.

Доказательство. Рассмотрим множество $K = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_{st} = 1\}$. Это в точности граница стандартного 1-куба с центром в нуле. K является компактным множеством, и $0 \notin K$. Непрерывная функция $\|\cdot\|$ имеет на компакте K конечные точные нижнюю и верхнюю грани $M = \sup(\|v\| \mid v \in K)$ и $\mu = \inf(\|v\| \mid v \in K)$, причём имеет место строгое неравенство $\mu > 0$, — иначе существовала бы последовательность $v_i \in K$ с $\|v_i\| \to 0$, содержащая (в силу компактности K) подпоследовательность, имеющую в K предел, что невозможно, ибо из-за непрерывности $\|\cdot\|$ и свойства $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ таким пределом мог бы быть лишь $0 \notin K$.

Итак, $\forall v \in K$ имеем $0 < \mu \leq \|v\| \leq M < \infty$. Но $\forall v \in K$ вектор $\dfrac{v}{\|v\|_{st}}$ лежит в K. Следовательно, $\left\|\dfrac{v}{\|v\|_{st}}\right\| = \dfrac{\|v\|}{\|v_{st}\|}$ лежит между μ и M $\forall v \in K$, что и требовалось. □

Беря в качестве $\|\cdot\|$ две любые нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ получим:

2.1.3. Следствие. *Для любых двух норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ на конечномерном вещественном векторном пространстве существеют вещественные положительные константы c и C такие, что*

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$$

Геометрически это свойство означает, что всякий ε-шар для первой нормы содержится в $C\varepsilon$-шаре и содержит $c\varepsilon$-шар для второй нормы. Тем самым справедливо

2.1.4. Следствие. *Любые две нормы на конечномерном вещественном пространстве индуцируют одну и ту же топологию, совпадающую с топологией покоординатной сходимости.*

2.2. Геометрическое описание норм.

Если интересоваться не топологией, а самими нормами, то совокупность всех норм на конечномерном пространстве допускает удобное геометрическое описание.

Сопоставим каждой норме $\|\cdot\|$ её единичный шар с центром в нуле

$$\Phi = B_1(0) = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}.$$

По предыдущему, Φ является ограниченным замкнутым множеством (замкнутость вытекает из непрерывности нормы), для которого нуль является внутренней точкой. Более того, Φ – выпукло. В самом деле, если $\lambda, \mu > 0$ и $\lambda + \mu = 1$, то $\forall\, v, w$ с $\|v\| \leq 1$ и $\|w\| \leq 1$ имеем

$$\|\lambda v + \mu w\| \leq \lambda\|v\| + \mu\|w\| \leq 1\ .$$

Заметим, что норма $\|\cdot\|$ однозначно восстанавливается по фигуре Φ, поскольку

$$\|v\| = \inf(\lambda \in \mathbb{R} \mid v \in \lambda\Phi)$$

2.2.1. Утверждение. *Сопоставление $\Phi \longmapsto \|v\|_\Phi$, где*

$$\|v\|_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \inf(\lambda \in \mathbb{R} \mid v \in \lambda\Phi) \tag{2-1}$$

является биекцией между множеством замкнутых выпуклых ограниченных подмножеств в $\mathrm{Aff}(V)$, *содержащих некоторую окрестность нуля, и множеством всех норм на* V.

Доказательство. Остаётся проверить лишь, что формула 2-1 действительно задаёт норму, если Φ замкнуто, выпукло, ограничено и содержит нуль внутри.

Положительность, невырожденность и однородность функции $\|v\|_\Phi$ очевидна (их достаточно проверить в одномерном случае).

Неравенство треугольника следует из выпуклости: $\forall v, w \in V$ точка $q = \dfrac{v+w}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi}$ является выпуклой комбинацией точек $\dfrac{v}{\|v\|_\Phi}$ и $\dfrac{w}{\|w\|_\Phi}$. Последние две точки лежат в Φ, поэтому $q \in \Phi$, откуда $\|v+w\|_\Phi \leq \|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi$.

§3. Скалярное произведение

При всей геометрической наглядности, понятие угла не слишком хорошо поддаётся аксиоматизации в контексте линейной алгебры. Гораздо удобнее аксиоматизировать свойства тесно связанного с ним понятия *скалярного произведения* (я напомню, что в школе скалярным произведением векторов u, v называют число

$$(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между u и v).

3.1. Определение. *Вещественное векторное пространство V называется* евклидовым, *если на нём задано* скалярное произведение[2], *т.е. функция*

$$(\cdot,\cdot) : \ V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : \ v, w \longmapsto (v, w) \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющая свойствам:

(i) симметричность: $(v, w) = (w, v) \qquad \forall v, w \in V$
(ii) положительность: $(v, w) \geq 0 \quad \forall v \in V$
(iii) невырожденность: $(v, v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0$
(iv) билинейность:

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall v, w \in V$$

$$\begin{array}{c} (v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) = (v, w_1 + w_2) \end{array} \qquad \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$$

3.1.1. Пример. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты относительно этого базиса. Очевидно, что для $v = \sum x^i e_i$ и $w = \sum y^i e_i$ формула

$$(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v x^v y^v$$

определяет скалярное произведение. Оно называется *стандартным евклидовым произведением на* $\mathbb{R}^n$ и замечательно тем, что базисные векторы e_i перемножаются по правилу

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

т.е. они *ортогональны* друг другу и имеют скалярные квадраты 1. Базис в евклидовом пространстве, обладающий такими свойствами, называются *ортонормированным*.

[2]Его называют также *евклидовой структурой*.

3.1.2. Пример. Непосредственным бесконечномерным обобщением предыдущего примера является скалярное произведение

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

на пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.

> Задача 3.5. Найдите какой-либо ортонормальный базис для этого скалярного произведения в подпространстве многочленов степени $\leqslant 3$ на $[0,1]$.

3.2. Теорема. *Пусть V — евклидово пространство и $\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\}$ — произвольный базис в нём. Тогда в V существует ортонормированный базис $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, матрица которого $C_{\tau e}$ в исходном базисе имеет верхнетреугольный вид:*

$$C_{\tau e}=\begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

Доказательство. Доказательство основано на двух идеях: для того, чтобы сделать из вектора a вектор $\tilde{a}$ с $(\tilde{a},\tilde{a})=1$, надо разделить a на $\sqrt{(a,a)}$, а для того, чтобы сделать из вектора b вектор, ортогональный данному вектору e с $(e,e)=1$, надо вычесть из b его *ортогональную проекцию по e*, которая равна $(e,b)e$. Точное рассуждение проводится по индукции.

Положим $e_1=\tau_1/\sqrt{(\tau_1,\tau_1)}$. Пусть уже построены векторы $e_1,e_2,\ldots,e_k$, такие, что их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой векторов $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k$, и такие, что $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$. Положим

$$\tilde{e}_{k+1}=\tau_{k+1}-(\tau_{k+1},e_1)e_1-(\tau_{k+1},e_2)e_2-\cdots-(\tau_{k+1},e_k)e_k=\tau_{k+1}-\sum_{\nu=1}^{k}(\tau_{k+1},e_\nu)e_\nu$$

Тогда вектор $\tilde{e}_{k+1}$ ортогонален каждому из векторов $e_1,e_2,\ldots,e_k$ и линейная оболочка векторов $e_1,e_2,\ldots,e_k,\tilde{e}_{k+1}$ совпадает с линейной оболочкой $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k+1}$ (в частности, $\tilde{e}_{k+1}\neq 0$). Остаётся положить

$$e_{k+1}=\frac{\tilde{e}_{k+1}}{\sqrt{(\tilde{e}_{k+1},\tilde{e}_{k+1})}}$$

□

Процедура построения ортонормированного базиса, использованная в доказательстве, называется *процессом ортогонализации Грама-Шмидта*.

3.3. Матрицы Грама. Свойство билинейности позволяет вычислять скалярные произведения между любыми векторами, если известны скалярные произведения между базисными векторами. При этом последние удобно организовать в матрицу

$$G_e=(g_{ij})=((e_i,e_j))$$

называемую *матрицей Грама скалярного произведения в базисе* e (или просто *матрицей Грама базиса* e).

Если $(x) = \sum x^i e_i$, $(y) = \sum y^i e_i$, то $((x),(y)) = \sum_{ij} x^i \cdot (e_i, e_j) \cdot y^j = (x)^t G_e(y)$, где $(x)^t$ — означает транспонированный столбец (т.е. строку) координат вектора x, (y) — столбец координат вектора (y), а G_e — матрицу Грама.

Если $\{a_1, \dots, a_n\}$ — другой базис, то координаты (x_a) и (x_e) связаны, как мы знаем, по формуле $(x_e) = C_{ea}(x_a)$, где C_{ea} — матрица базиса $\{a\}$ в базисе $\{e\}$. Подставляя это в предыдущую формулу, получаем, что $\forall x, y \in V$

$$(x, y) = (x_a)^t C_{ea}^t G_e C_{ea} (y_a)^t$$

Поэтому матрицы Грама G_a и G_e связаны формулой $G_a = C_{ea}^t G_e C_{ea}$.

Отметим два следствия этой формулы:

3.3.1. Следствие. *Если базис $\{e\}$ ортонормированный, то базис $\{a\}$ тогда и только тогда будет ортонормированным, когда его матрица C_{ea} в базисе $\{e\}$ удовлетворяет соотношению*

$$C_{ea}^t = C_{ea}^{-1}$$

Доказательство. Матрица Грама ортонормированного базиса — единичная, так что по предыдущей формуле $E = C_{ea}^t E C_{ea} = C_{ea}^t C_{ea}$. □

Матрицы, транспонированные к своим обратным, называются *ортогональными*.

3.3.2. Следствие. *При переходе к другому базису определитель матрицы Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода.*

3.4. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Матрицу Грама $G_a = ((a_i, a_j))$ можно рассмотреть для любого набора векторов $\{a_1, \dots, a_m\}$.

3.4.1. Утверждение. *Определитель матрицы Грама удовлетворяет неравенству*

$$\det((a_i, a_j)) \geqslant 0$$

и равенство равносильно линейной зависимости векторов $(a_1, \dots, a_m)$

Доказательство. Если векторы линейно зависимы, скажем $a_1 = \sum_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu a_\nu$, то при всех k мы будем иметь $(a_1, a_k) = \sum\limits_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu (a_\nu, a_k)$, т. е. первая строка матрицы Грама G_a будет линейной комбинацией остальных. Поэтому $\det G_a = 0$.

Если векторы линейно-независимы, то они составят базис в своей линейной оболочке W. Ограничивая скалярное произведение на W мы, очевидно, получим опять скалярное произведение. Выбирая в W ортонормированный базис $\{e\}$, будем иметь $\det G_e = \det E = 1$, а значит

$$\det G_a = (\det C_{ea})^2 > 0.$$

□

Частный случай этого неравенства для системы из двух векторов (v, w):

$$\det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = (v,v)(w,w) - (v,w)^2 \geqslant 0$$

в формулировке: *квадрат скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения их скалярных квадратов* (*причём равенство равносильно пропорциональности векторов*), известен как *неравенство Коши-Буняковского-Шварца.*

3.4.2. Пример. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^n$ означает, что для любых наборов вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

Аналогично, для функций на отрезке $[a, b]$ получаем

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx$$

3.5. Углы. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца позволяет в евклидовом пространстве определить *угол* φ между векторами v и w как действительное число, удовлетворяющее условию

$$(v, w) = \sqrt{(v, v)(w, w)} \cdot \cos\varphi$$

Такое определение задаёт φ с точностью до замены φ на $-\varphi$ и добавления целых кратных 2π, и для однозначной фиксации можно определить геометрический угол $\varphi_{геом}$ как значение φ, попадающее в отрезок $[0, \pi]$. Заинтересованный читатель без труда проверит, что такое определение угла согласуется со всеми ожидаемыми геометрическими свойствами углов (типа аддитивности).

3.6. Евклидовы метрики.

3.6.1. Лемма. *Формула* $\|v\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ *определяет норму на евклидовом пространстве* V.

Доказательство. Положительность, невырожденность и однородность немедленно следуют из свойств скалярного произведения. Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$(\|v\| + \|w\|)^2 = (v, v) + (w, w) + 2\sqrt{(v, v)(w, w)} \geqslant (v, v) + (w, w) + 2(v, w) = \|v + w\|^2 .$$

□

Обратное утверждение, что всякая норма индуцирована некоторым скалярным произведением, *неверно*. Действительно, если $\|v\|^2 = (v, v) \quad \forall v \in V$, то $\forall v, w \in V$ должно выполняться тождество параллелограмма:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон).

> Задача 3.6. Приведите пример нормы, для которой тождество параллелограмма нарушается.

С другой стороны, если норма $\|\cdot\|$ всё-таки возникает из скалярного произведения, то равенство

$$\|v + w\| - \|v - w\| = 4(v, w)$$

показывает, что скалярное произведение однозначно восстанавливается по норме. Более того, определив для произвольной нормы $\|\cdot\|$ функцию (v,w) правилом

$$(v,w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\| - \|v-w\|\right)\ ,$$

мы видим, что эта функция симметрична, положительна и невырождена.

Задача 3.7. Докажите, что если для $\|\cdot\|$ выполнено тождество параллелограмма, то функция $(\cdot,\cdot)$ будет удовлетворять тождеству $(v_1+v_2,w) = (v_1,w)+(v_2,w)$.

В силу симметрии аналогичное тождество будет справедливо и для второго аргумента. Из этих тождеств следует билинейность функции (v,w) относительно умножения на целые, а стало быть, и рациональные числа. Вследствие непрерывности нормы, функция (v,w) оказывается тогда билинейной и над $\mathbb{R}$.

Таким образом, для того, чтобы *норма была индуцирована скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла тождеству параллелограмма*. При этом скалярное произведение однозначно восстанавливается по норме.

§4. Евклидова геометрия

4.1. Объём. Я напомню, что на последней лекции прошлого семестра было аксиоматически определено понятие *ориентированного объёма* $\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1,v_2,\dots,v_n$. Аксиомы формализовали два геометрических свойства объёма: он должен умножаться на λ при умножении любого из векторов на λ и не должен меняться при параллельном заваливании параллелепипеда на бок (т.е, при замене любого из векторов v_i на его сумму с вектором, пропорциональным какому-либо из оставшихся $v_j\neq v_i$).

Было показано, что такая функция $\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ обязана быть *полилинейной* (т.е. линейной по каждому из v_i) и *кососимметричной* (т.е. менять знак при перестановке аргументов, или, что равносильно, обращаться в нуль, если $v_i=v_j$ для некоторых $i\neq j$). Было показано также, что такие функции составляют *одномерное* векторное пространство и однозначно определяются указанием значения на каком-либо базисе $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ по формуле

$$\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n) = \det C_{e,v}\cdot \mathrm{Vol}(e_1,e_2,\dots,e_n).$$

Таким образом, для фиксации формы объёма на V достаточно указать *эталоннный базис* $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, для которого объём будет единичным. Если пространство V евклидово, то в качестве эталонного базиса выбирают *ортонормированный базис*. Любые два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве связаны при помощи ортогональной матрицы перехода, определитель которй равен либо $+1$, либо -1. В первом случае базисы называются *одинаково ориентированными*, а во втором случае — *противоположно ориентированными*. Форма объёма, таким образом, не изменяется при замене эталонного базиса на базис той же ориентации, и меняет знак при смене ориентации. Абсолютпая величина формы объёма вообще не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса и называется *евклидовым* (неориентированным) *объёмом* параллелепипеда. Мы сохраним для него обозначение $\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n)$.

4.1.1. Лемма. *Евклидов объём параллелепипеда, натянутого на n векторов, равен корню из определителя матрицы Грама этой системы векторов*

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sqrt{\det G_v}$$

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависимы, то обе части написанного равенства — нулевые. Если $\{v\}$ — базис, то для какого-либо ортонормального базиса $\{e\}$ имеем $\det G_v = (\det C_{ev})^2$ и $\mathrm{Vol}(v) = |\det C_{ev}|$, что и доказывает лемму. □

4.2. Ортогональное проектирование. Пусть $U \subset V$ — подпространство в евклидовом пространстве. Тогда существует и единственен линейный оператор

$$\mathrm{ortpr}_U : \; V \longrightarrow U : \; v \longrightarrow \mathrm{ortpr}_U(v),$$

обладающий свойством

$$(v, u) = (\mathrm{ortpr}_U(v), u) \qquad \forall\, v \in V,\; u \in U. \tag{4-2}$$

Единственность такого оператора следует из невырожденности скалярного произведения, ограниченного на подпространство U: если $(u_1, u) = (u_2, u)\ \forall u \in U$, то $(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, откуда $u_1 = u_2$.

Задача 3.8. Убедитесь аналогичным образом, что произвольное теоретико-множественное отображение ortpr_U, удовлетворяющее равенству (4-2), автоматически будет линейным оператором.

Построение ортогональной проекции ortpr_U аналогично процессу Грама-Шмидта. Для произвольного базиса $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ в подпространстве U положим

$$\mathrm{ortpr}_U(v) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(v, u_\nu)}{\|u_\nu\|} \cdot u_\nu \,. \tag{4-3}$$

Задача 3.9. Убедитесь в справедливости равенства (4-2).

Оператор ortpr_U называется оператором *ортогонального проектирования* на подпространство U. Согласно (4-2) он тождественным образом действует на U, а ядром имеет подпространство

$$U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0\ \forall u \in U\},$$

которое называется *ортогональным дополнением* к пространству U в V. Из (4-2) следует также, что для любого вектора $v \in V$ разность

$$v_{U^\perp} \overset{\text{def}}{=} v - \mathrm{ortpr}_U(v)$$

лежит в ортогональном дополнении к U. Поскольку $U \cap U^\perp = 0$ (ввиду невырожденности скалярного произведения), мы получаем, что $V = U \oplus U^\perp$, и ortpr_U действительно проектирует V на U вдоль $U^\perp$.

Разложение $v = \mathrm{ortpr}_U(v) + v_{U^\perp}$ называют *ортогональным разложением* вектора v. Из всех точек пространства U конец вектора $\mathrm{ortpr}_U(v)$ является ближайшей точкой к концу вектора v. Действительно, $\forall u \in U$

$$\|v - (\mathrm{ortpr}_U(v) + u)\| = \\ = \|v_{U^\perp} - u\| = \sqrt{(v_{U^\perp} - u, v_{U^\perp} - u)} = \sqrt{\|v_{U^\perp}\|^2 + \|u\|^2} \geq \\ \|v_{U^\perp}\| = \\ = \|v - \mathrm{ortpr}_U(v)\| \,.$$

Вектор $v_{U^\perp}$ можно интерпретировать как *высоту* $(k+1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v,\ u_1, u_2, \dots, u_k$, опущенную из вершины v на грань $(u_1, u_2, \dots, u_k) \subset U$.

Задача 3.10. Докажите, что объём этого $(k+1)$-мерного параллелепипеда равен k-мерному объёму грани $(u_1, u_2, \dots, u_k)$, умноженному на длину опущенной на неё высоты.

Указание: Как мы видели, высоту $v_{U^\perp}$ можно получить, отнимая из v подходящие кратные векторов u_ν. Значит, $\mathrm{Vol}(v,\ u_1, u_2, \dots, u_k\ ) = \mathrm{Vol}(v_{U^\perp},\ u_1, u_2, \dots, u_k\ )$. Вычисление последнего объёма при помощи разложения определителя матрицы Грама по первому столбцу и даёт нужную формулу.

4.2.1. Следствие. *Кратчайшее расстояние от конца вектора v до подпространства с базисом $u_1, u_2, \dots, u_k$ равно отношению определителей Грама систем векторов $(v,\ u_1, u_2, \dots, u_k)$ и $(u_1, u_2, \dots, u_k)$.*

Ортогональное проектирование часто возникает в вычислительной математике при приближённом решении некорректных (т.е. несовместных) систем линейных уравнений. Пусть требуется решить систему линейных уравнений, геометрический смысл которой состоит в том, чтобы найти коэффициенты разложения заданного вектора v по некоторой заданной линейно-независимой системе $\{u_1, u_2, \dots, u_\nu\}$, и пусть эта система несовместна, т.е. вектор v на самом деле не лежит в линейной оболочке векторов u_ν. Тогда формула (4-3) даёт наилучшее (в естественном смысле) приближённое решение поставленной задачи, а следствие Сл.4.2.1 позволяет оценить погрешность этого приближения. Описываемый приём известен как *метод наименьших квадратов*.

Задача 3.11. Найдите кубический многочлен от переменной x, интеграл которого по отрезку $[-1, 1]$ был бы наиболее близок к интегралу от функции $\cos(3x)$.