Лекция 2
Аффинные пространства

▷Аффинизация и векторизация ▷Аффинные отображения ▷Аффинные координаты ▷Аффинные подпространства ▷Барицентры и барицентрические координаты ▷Выпуклые фигуры ▷Опорные полупространства ▷Грани и крайние точки ▷Выпуклые многогранники ▷Теорема Минковского-Вейля ▷Максимумы аффинных функционалов на выпуклых многогранниках

§1. Основные понятия

Геометрия изучает свойства *фигур*. Фигуры состоят из *точек* и распологаются в *точечном* пространстве. Имеется много математических конструкций точечного геометрического пространства. В этом курсе мы обсудим две из них: аффинное и проективное пространства. Обе они исходят из данного векторного пространства и объясняют, в сущности, связь между точками и векторами.

Неформально говоря, аффинное пространство — это некоторое множество точек, в котором векторы из данного векторного пространства могут интерпретироваться как направленные отрезки, а точнее, — как классы равных направленных отрезков. Формализовать это можно двумя эквивалентными способами.

1.1. Определение. (Первый способ) *Множество* $\mathbb{A}$ *называется аффинным*[1] *пространством ассоциированным с векторным пространством* $V_{\mathbb{A}}$, *если задана операция*

$$\mathbb{A} \times V_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{A}\colon\ (p,v) \longrightarrow p+v \in \mathbb{A}\ ,$$

которая называется откладыванием вектора v *от точки* p *и удовлетворяет аксиомам:*

(i) $(p+v)+w = p+(v+w) \qquad \forall v.w \in V_{\mathbb{A}} \quad \forall p \in \mathbb{A}$

(ii) $p + \overrightarrow{0} = p \qquad \forall p \in \mathbb{A}$

(iii) $\forall p,q \in \mathbb{A}$ *вектор* $v \in V_{\mathbb{A}}$, *такой что* $q = p+v$, *сущестует и единственен.*

1.2. Определение. (Второй способ) *Множество* $\mathbb{A}$ *называется аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством* $V_{\mathbb{A}}$, *если каждой паре точек* $P,Q \in \mathbb{A}$ *сопоставлен вектор* $\overrightarrow{PQ} \in V_{\mathbb{A}}$, *так что выполнены следующие два условия:*

[1] этот термин — калька с английского affine (ассоциированный), чем и обусловлена его негреческая орфография

(i) $\forall v \in V_{\mathbb{A}}$ *и* $\forall P \in \mathbb{A}$ *существует и единственна точка* $Q \in \mathbb{A}$, *такая что* $\overrightarrow{PQ} = v$;

(ii) Для любых трёх точек $A, B, C \in \mathbb{A}$ *(необязательно разных) выполнено* ***правило треугольника:*** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Задача 2.1. Проверьте, что оба определения эквивалентны.

Задача 2.2. Проверьте, что для четырёх точек A, B, C, D аффинного пространства равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ равносильны друг другу (этот факт известен как *правило параллелограмма*).

1.3. Аффинизация и векторизация. Со всяким векторным пространством V можно канонически связать аффинное пространство, называемое его *аффинизацией* и обозначаемое $\mathrm{Aff}(V)$, Точки $\mathrm{Aff}(V)$ взаимно однозначно соответствуют векторам V, и если $A, B \in \mathrm{Aff}(V)$ – две точки, соответствующие векторам $a, b \in V$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ по определению полагают равным $\overrightarrow{AB} = b - a$.

Таким образом, точки $\mathrm{Aff}(V)$ можно воспринимать как концы векторов из V, отложенных от нуля $O \in \mathrm{Aff}(V)$.

Задача 2.3. Убедитесь, что $\mathrm{Aff}(V)$ удовлетворяет аксиомам аффинного пространства.

Обратная процедура представления аффинного пространства $\mathbb{A}$ в виде множества концов векторов ассоциированного с ним векторного пространства $V_{\mathbb{A}}$ называется *векторизацией* и определена неоднозначно — она зависит от выбора в $\mathbb{A}$ точки $O \in \mathbb{A}$, называемой *началом отсчета* или *центром* векторизации. Если такое начало выбрано, то, сопоставляя каждой точке $P \in \mathbb{A}$ её *радиус-вектор* $\overrightarrow{OP} \in V_{\mathbb{A}}$, мы получаем отождествление точек $\mathbb{A}$ с векторами из $V_{\mathbb{A}}$.

В частности, можно определить линейную комбинацию набора точек как точку, радиус-вектор которой равен соответствующей линейной комбинацию радиус-векторов точек из набора относительно некоторой фиксированной начальной точки. Разумеется, результат будет зависеть от выбора начальной точки, за исключением одного замечательного случая, подробнее о котором мы поговорим в следующем параграфе.

Задача 2.4. Докажите, что линейная комбинация точек, в которой сумма коэффициентов равна 1, не зависит от выбора центра векторизации.

Мы будем обозначать векторизацию аффинного пространства $\mathbb{A}$ с центром в точке $O \in \mathbb{A}$ через $\mathrm{Vect}_O(\mathbb{A})$.

1.4. Аффинные отображения. Всякое отображение $F\colon\ \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ между аффинными пространствами порождает отображение $\tilde{F}_O\colon\ \mathrm{Vect}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Vect}_{F(O)}(\mathbb{B})$ между их векторизациями (зависящее, вообще говоря, от выбора центра). По определению

$$\tilde{F}_O(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{F(O)F(P)} \in \mathrm{Vect}_{F(O)}(\mathbb{B}) \qquad \forall\ \overrightarrow{OP} \in \mathrm{Vect}_O(\mathbb{A})$$

Отображение F называется *аффинным* (или гомоморфизмом аффинных пространств), если $\tilde{F}_O$ — линейный оператор. Корректность такого определения даёт следующая

1.4.1. Лемма. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— аффинные пространства, ассоциированные с векторными пространствами* $V_{\mathbb{A}}$ *и* $V_{\mathbb{B}}$. *Если отображение* $\tilde{F}_O\colon\ V_{\mathbb{A}} \longrightarrow V_{\mathbb{B}}$ *линейно хотя бы для одной точки*

$O \in \mathbb{A}$, то оно линейно для любой точки и не зависит от выбора точки (т.е. $\forall O_1, O_2 \in \mathbb{A}$ операторы $\tilde{F}_{O_1}$ и $\tilde{F}_{O_2}$ совпадают как элементы $\mathrm{Hom}(V_{\mathbb{A}}, V_{\mathbb{B}})$).

Доказательство. Пусть $O \in \mathbb{A}$ — фиксированная точка. Если $F_O\colon V_{\mathbb{A}} \longrightarrow V_{\mathbb{B}}$ является линейным оператором, то для любой точки $O_1 \in \mathbb{A}$ и для любого вектора $v = \overrightarrow{O_1Q} \in V_{\mathbb{A}}$ получим:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{O_1}(v) &= \overrightarrow{F(O_1)F(Q)} = \overrightarrow{F(O)F(Q)} - \overrightarrow{F(O)F(O_1)} = \\ &= \tilde{F}_O(\overrightarrow{OQ}) - \tilde{F}_O(\overrightarrow{OO_1}) = \tilde{F}_O(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OO_1}) = F_O(v)\,. \end{aligned}$$

Это значит, что $\tilde{F}_{O_1} = \tilde{F}_O$, что и требовалось.

1.4.2. Дифференциал. Поскольку оператор F_O не зависит от выбора точки O, он обозначается через DF и называется *дифференциалом*[2] аффинного отображения F.

Отображение F однозначно восстанавливается, если известен его дифференциал и образ какой-либо точки: $\forall v \in V$ имеем $F(O+v) = F(O) + DF(v)$. В частности, два отображения F и G с одинаковым дифференциалом различаются на *параллельный перенос*: если $DF = DG$ и $\tau = \overrightarrow{F(O)G(O)}$, то $\forall P$ получим

$$G(P) = G(O + \overrightarrow{OP}) = G(O) + DG(\overrightarrow{OP}) = F(O) + DF(\overrightarrow{OP}) + \tau = F(P) + \tau$$

Допуская известную вольность речи, можно сказать,что аффинное отображение есть композиция линейного оператора и параллельного переноса.

1.4.3. Аффинные функционалы. Аффинное отображение $a\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Aff}(k)$, где $\mathrm{Aff}(k)$ — аффинное пространство, ассоциированное с 1-мерным координатным векторным пространством, называется *аффинным функционалом*. Если в $\mathbb{A}$ выбрана начальная точка $O \in \mathbb{A}$, мы, по предыдущему, можем записать $\forall P \in \mathbb{A}$

$$a(P) = \alpha(\overrightarrow{OP}) + a_0\,,$$

где $a_0 = a(O) \in k$ есть значение функционала a в точке O, а $\alpha \in {V_{\mathbb{A}}}^*$ есть дифференциал a, т.е. линейный функционал на $V_{\mathbb{A}}$.

Задача 2.5. Убедитесь, что аффинные функционалы на n-мерном аффинном пространстве составляют $(n+1)$-мерное *векторное* пространство.

[2] Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства над полем $\mathbb{R}$, то для любого отображения $F\colon\ \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ и любой точки $O \in \mathbb{A}$ можно определить дифференциал $D_OF\colon\ V_{\mathbb{A}} \longrightarrow V_{\mathbb{B}}$ как "линейную часть" отображения $\tilde{F}_O$, а точнее, как такой *линейный оператор* между ассоциированными векторными пространствами, который приближает $\tilde{F}_O$ с точностью до малых порядка выше первого, так что

$$F(P) = F(O) + D_OF(\overrightarrow{OP}) + o(\overrightarrow{OP})\,.$$

Разумеется, D_OF будет существовать не для всех отображений (те отображения, для которых дифференциал существует, называются в анализе *дифференцируемыми*) и будет зависеть от O. Доказанная выше лемма в этих терминах означает, что *аффинное отображение дифференцируемо и имеет постоянную производную.*

1.5. Аффинные координаты. Аффинизацию $\mathrm{Aff}(k^n)$ координатного векторного пространства называют *аффинным координатным пространством* и обозначают $\mathbb{A}^n$ или $\mathbb{A}^n(k)$, если важно обозначить поле. Произвольное n-мерное аффинное пространство *изоморфно* пространству $\mathbb{A}^n$ в том смысле, что существует биективное аффинное отображение $\mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$. Каждое такое отображение называется *аффинной системой координат* на $\mathbb{A}$ и однозначно определяется выбором в $\mathbb{A}$ *репера*, т.е. начальной точки $O \in \mathbb{A}$ и базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ в $V_{\mathbb{A}}$. *Аффинные координаты* точки $P \in \mathbb{A}$ относительно репера $\{O, (e_1, e_2, \dots, e_n)\}$ — это столбец координат вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, рассматриваемый как точка в $\mathbb{A}^n = \mathrm{Aff}(k^n)$.

Задача 2.6. Как связаны линейные координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ и аффинные координаты точек P и Q относительно репера $\{O, (e_1, e_2, \dots, e_n)\}$?

Задача 2.7. Пусть (x^ν) — аффинный координатный столбец на $\mathbb{A}^n$. Докажите, что всякий аффинный функционал на $\mathbb{A}^n$ имеет вид $a(x) = a_1x^1 + \dots + a_nx^n + a_0$, где $a_\nu \in k$ — константы, однозначно определяемые по a.

Задача 2.8. Убедитесь, что всякое аффинное отображение $F\colon \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ действует на столбец координат по формуле: $F(x) = M(x^\nu) + (b^\mu)$ (где M — матрица размера $m \times n$, а (b^μ) — столбец координат некой фиксированной точки в $\mathbb{A}^m$), причём и M и b однозначно определяются по F.

1.6. Аффинные подпространства. k-мерным *аффинным подпространством*, или короче, *k-мерной плоскостью* в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ называется всякое подмножество вида

$$\pi(p, U) = p + U = \{q \in \mathbb{A} \mid q = p + u \text{ по всем } u \in U\},$$

где $p \in \mathbb{A}$ — фиксированная точка, а $U \subset V_{\mathbb{A}}$ — векторное подпространство, называемое *направляющим подпространством* плоскости $\pi = \pi(p, U)$.

Неформально, плоскость — это совокупность всех точек, которые можно получить из некоторой данной точки p, откладывая от неё всевозможные векторы из подпространства U.

Задача 2.9. Убедитесь, что $\pi(p, U) = \pi(q, W)$ тогда и только тогда, когда $U = W$ и $\overrightarrow{pq} \in U = W$.

Задача 2.10. Докажите, что подмножество $M \subseteq \mathbb{A}$ тогда и только тогда является аффинным подпространством, когда векторы $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in M$ составляют векторное подпространство в $V_{\mathbb{A}}$.

Пусть $\pi = \pi(p, U) \subset \mathbb{A}$. Числа $\dim \pi \overset{\text{def}}{=} \dim U$ и $\mathrm{codim} \pi \overset{\text{def}}{=} \dim \mathbb{A} - \dim U$ называются, соответственно, *размерностью* и *коразмерностью* плоскости π. Плоскости коразмерности 1 называют *гиперплоскостями*, а плоскости размерности 1 — прямыми.

Задача 2.11. Докажите, что через любые $k+1$ точек, не лежащих в $(k-1)$-мерной плоскости, проходит и притом только одна k-мерная плоскость (в частности, через любую пару несовпадающих точек можно провести единственную прямую).

Задача 2.12. Докажите, что подмножество в аффинном пространстве тогда и только тогда является подпространством, когда вместе с каждыми двумя точками оно содержит и проходящую через них прямую.

1.6.1. Задание подпространств уравнениями. Всякая плоскость

$$\pi(p, U) = p + U \in \mathrm{Aff}(V)$$

может быть задана как множество решений системы линейных неоднородных уравнений:

$$\pi(p, U) = \{v \in \mathrm{Aff}(V) \mid \alpha(v) = \alpha(p)\ \forall \alpha \in \mathrm{Ann}\, U\}$$

(действительно, условие $v = p + u$, где $u \in U$, равносильно тому, что $\alpha(v) = \alpha(p)\ \forall \alpha \in \mathrm{Ann}\, U$). Выбор в $\mathrm{Ann}\, U$ базиса $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k}\}$ позволяет заменить эту систему равносильной системой из $n-k$ уравнений, так что коразмерность плоскости равна наименьшему числу линейных уравнений, которыми её можно задать.

1.6.2. Взаимное расположение. Пусть π_1 и π_2 — две плоскости в $\mathrm{Aff}(V)$, с направляющими подпространствами U_1 и U_2 соответственно. Тогда имеются две возможности: $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ и $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$.

В первром случае плоскости называются *скрещивающимися*, если $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, и *параллельными с кратностью* k, — если $U_1 \cap U_2 = W$ и $\dim W = k > 0$.

В случае, когда пересечение плоскостей не пусто, оно является плоскостью, ассоциированной с векторным пространством $U_1 \cap U_2$. В частности, если $U_1 \cap U_2 = 0$, но $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, то $\pi_1 \cap \pi_2$ — одна точка (т.е. нульмерная плоскость), и в этом случае плоскости называются *трансверсальными*.

1.6.3. Аффинные оболочки. Наименьшая плоскость, содержащая данное мноожество точек $M \subset \mathrm{Aff}(V)$ называется *аффинной оболочкой* множества M и обозначается $\mathrm{aff}(M)$. Эту плоскость можно также описать как пересечение всех аффинных подпространств, содержащих M, либо как плоскость вида $\pi(p, U) = p + U$, где $p \in M$, а U есть линейная оболочка всевозможных векторов $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in M$.

Задача 2.13. Проверьте корректность и эквивалентность этих двух описаний.

Задача 2.14. Найдите размерность аффинной оболочки двух скрещивающихся плоскостей размерностей m и k.

Задача 2.15. Проверьте, что функционалы вычисления значения на некотором множестве точек порождают пространство, сопряжённое к векторному пространству аффинных функционалов на аффинной оболочке этих точек.

§2. Барицентрические координаты

2.1. Центр тяжести системы точек. Предположим. что в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над полем k задан набор точек $p_1, p_2, \dots, p_s$, и каждой точке p_ν приписан *вес* $\lambda_\nu \in k$. Точка c называется *центром тяжести* (или *центром масс*) этого набора взвешенных точек, если

$$\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu\ \overrightarrow{cp_\nu} = 0 \tag{2-1}$$

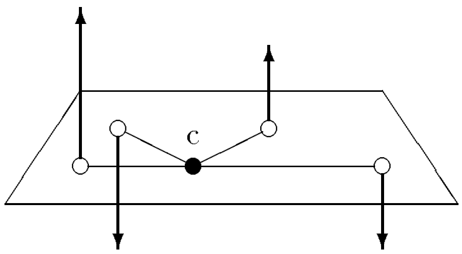

Рис. 2–A. Моменты сил.

Это название происходит из механики и связано с тем, что при $k = \mathbb{R}$ сумма в левой части (2-1) есть не что иное, как *алгебраическая сумма моментов* относительно точки c сил λ_ν, приложенных к точкам p_ν в направлениях, перпендикулярных их аффинной оболочке, как на рис.рис. 2–A (если эта оболочка — всё пространство, то его следует вложить в качестве гиперплоскости в некоторое большее пространство).

Как известно из механики, равенство нулю такой суммы означает, что плоскость закреплённая в точке c не будет вращаться под действием этих сил.

2.1.1. Лемма. *Для любого набора точек* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *с весами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, *такими что* $\sum \lambda_\nu \neq 0$, *центр тяжести существует и единственен.*

Доказательство. Рассмотрим какие-либо две различные точки c и e и сравним суммы моментов (2-1), посчитанные относительно этих двух точек:

$$\sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{ep_\nu} = \sum \lambda_\nu (\ \overrightarrow{ec} \ + \ \overrightarrow{cp_\nu} \ ) = \left(\sum \lambda_\nu\right) \ \overrightarrow{ec} \ + \sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{cp_\nu}$$

Таким образом, при $\sum \lambda_\nu \neq 0$ суммы различаются на ненулевой вектор $\left(\sum \lambda_\nu\right) \ \overrightarrow{ec}$. Поэтому, зафиксировав произвольную точку e, мы получим нулевую сумму моментов в точности для единственной точки c, связанной с e по формуле: $c = e + \sum_i \dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_\nu \lambda_\nu} \ \overrightarrow{ep}_i$. □

2.1.2. Следствие. *Для любого набора чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in k$ *с суммой* $\sum \lambda_\nu = 1$ *и любого набора точек* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *точка*

$$c = e + \sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{ep_\nu}$$

не зависит от выбора точки e *(и является центром тяжести для точек* p_ν *с весами* λ_ν*).*

2.2. Барицентрические комбинации. При условии, что сумма весов $\sum \lambda_\nu = 1$ точка $c = e + \sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{ep_\nu}$ из предыдущего следствия называется *барицентром* системы точек p_ν с весами λ_ν и обозначается через $\sum \lambda_\nu p_\nu$. Подчеркну, что это обозначение предполагает, что $\sum \lambda_\nu = 1$. Сумма $\sum \lambda_\nu p_\nu$ называется *барицентрической комбинацией* и во многих случаях ведёт себя по отношению к аффинным объектам точно также, как линейная комбинация векторов ведёт себя по отношению к линейным объектам.

Задача 2.16. Докажите, что для любой барицентрической комбинации $\sum \lambda_\nu p_\nu$ и для любого аффинного отображения F справедливо равенство:

$$F(\sum \lambda_\nu p_\nu) = \sum \lambda_\nu F(p_\nu)$$

2.2.1. Утверждение. *Пусть* $(n+1)$ *точек* $(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *не содержатся в* $(n-1)$*-мерной плоскости (иными словами,* $\dim \mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) = n$*). Тогда любая точка* $q \in \mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *допускает и притом единственное представление в виде барицентрической комбинации:*

$$q = \sum \lambda_\nu p_\nu .$$

Доказательство. Условия означают, что n векторов $\overrightarrow{p_0 p}_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, составляют базис в векторном пространстве $\mathrm{Vect}_{p_0} \mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Тем самым для любой точки q из аффинной оболочки $\mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ вектор $\overrightarrow{p_0 q}$ допускает и притом единственное представление в виде

$$\overrightarrow{p_0 q} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \ \overrightarrow{p_0 p_\nu} \ .$$

Это равенство эквивалентно равенству $q = p_0 + \sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \ \overrightarrow{p_0 p_\nu}$, которое при условии, что $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu = 1$ (т.е. что величина λ_0 вычисляется из равенства $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu$), и означает, по определению, что q — это барицентр. □

2.3. Барицентрические координаты. Если в n-мерном аффинном пространстве фиксировать $(n+1)$ точек $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$, которые его аффинно порождают, то как показывает предыдущее предложение, точки пространства можно однозначно параметризовать наборами из $n+1$ чисел $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, подчинённых условию $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu = 1$. Такие наборы назы̆ются *барицентрическими координатами* точек аффинного пространства относительно *аффинного базиса* $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$. Барицентрические координаты естественно возникают во многих задачах и ведут себя аналогично аффинным координатам.

> Задача 2.17. Убедитесь, что плоскости задаются в барицентрических координатах системами линейных уравнений, и наоборот, — системы линейных уравнений на барицентрические координаты (вместе с условием $\sum \lambda_\nu = 1$) описывают плоскости.

При вычислениях с барицентрическими комбинациями черезвычайно полезна следующая теорема, представающая собой своего рода закон ассоциативности (с точки зрения механической интуиции — очевидный!).

2.4. Теорема о группировании масс. *Пусть точки $p_1, p_2, \dots, p_s$ с весами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ имеют центр тяжести p, а точки $q_1, q_2, \dots, q_r$ с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ имеют центр тяжести q. Если объединение этих двух наборов точек*[3]*, имеет центр тяжести c, то c будет также и центром тяжести для пары точек p и q, взятых с весами $\sum \lambda_i$ и $\sum \mu_j$ соответственно.*

Доказательство. Поскольку c — центр тяжести объединённого набора, имеем равенство:

$$\sum_i \lambda_i \ \overrightarrow{cp_i} + \sum_j \mu_j \ \overrightarrow{cq_j} = 0$$

Подставляя в него $\overrightarrow{cp_i} = \overrightarrow{cp} + \overrightarrow{pp_i}$ и $\overrightarrow{qq_j} = \overrightarrow{cq} + \overrightarrow{qq}_j$, и пользуясь равенствами $\sum \lambda_i \ \overrightarrow{pp_i} = 0$ и $\sum \mu_j \ \overrightarrow{qq_j} = 0$, получим: $\left(\sum \lambda_i\right) \ \overrightarrow{cp} + \left(\sum \mu_j\right) \ \overrightarrow{cq} = 0$. □

2.4.1. Следствие. *Барицентрическая комбинация от барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией исходных точек, т.е. если точки $\{r_i\}$ барицентрически выражаются через точки $\{q_j\}$, а эти последние — через точки $\{p_k\}$, то $\{r_i\}$ представимы в виде барицентрических комбинаций $\{p_k\}$.*

2.4.2. Пример. Пусть на аффинной плоскости нарисован треугольник ABC, и на его сторонах (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1, C_1 (см. рис. 2–Б). Набор весов α, β, γ, которые следует поместить в его вершины, так чтобы центр тяжести точек A и B оказался в точке C_1, центр тяжести точек B и C — в точке A_1, а центр тяжести точек C и A — в точке B_1, существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1 \tag{2-2}$$

[3] В условии теоремы допускается, чтобы наборы имели общие точки. При объединении наборов в таких точках веса складываются.

(где под отношением двух пропорциональных векторов понимается коэффициент пропорциональности). Если написанное условие выполнено, то по теореме о группировании масс центр тяжести треугольника должен лежать на каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1, и следовательно они будут пересекаться в одной точке. С другой стороны, при фиксированных точках A_1 и B_1 условие (2-2) однозначно фиксирует и точку C_1. Поэтому прямая CC_1 будет проходить через точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 *только* при выполнении равенства (2-2) и никогда более.

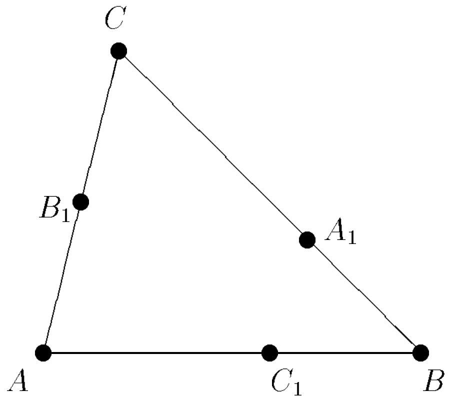

Рис. 2–Б. К теореме Чевы.

Итак, условие (2-2) равносильно тому, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Этот факт известен как *теорема Чевы*.

Задача 2.18. Пусть в аффинном пространстве над полем $\mathbb{R}$ задан произвольный набор из n точек. Его *медианой* с вершиной в одной из заданных точек называется отрезок[4], соединяющий эту точку с центром тяжести остальных точек, взятых с единичными весами. Докажите, что все медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $(n-1):1$, считая от вершин.

§3. Выпуклая геометрия.

С этого момента и до конца следующей лекции мы будем заниматься только аффинными пространствами над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (все исключения будут специально оговариваться). Аффинная геометрия вещественных пространств представляет особый интерес, поскольку именно она, собственно, и составляет содержание геометрии в традиционном понимании этого слова и наиболее привычна для "массовой" геометрической интуиции. Формальная же её специфика состоит в том, что на прямой $\mathbb{R}^1$ имеется *порядок*, т.е. вещественные числа разбиваются на *отрицательные* и *положительные*, а также в том, что на вещественных аффинных пространствах имеется *топология*, хорошо известная из курса анализа.

3.1. Кубы и стандартная топология в $\mathbb{R}^n$. Фиксируем в вещественном аффинном пространстве какие-либо аффинные координаты $(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

3.1.1. Кубы. Будем называть *ε-кубом* с центром в точке $p = (p^1, p^2, \dots, p^n)$ фигуру

$$Q(p,\varepsilon) = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mid |x^i - p^i| \le \varepsilon \ \forall i\},$$

где под ε всегда понимается вещественное *положительное* число. При этом куб $Q(0,1)$ мы будем называть *стандартным кубом*.

Задача 2.19. Сколько у n-мерного куба k-мерных граней (при каждом $k = 0, 1, \dots, (n-1)$) и сколько у него внутренних диагоналей?

Задача 2.20. Нарисуйте проекцию 4-мерного куба на 2-мерную плоскость (любую, но такую, чтобы разные вершины проектировались в разные точки плоскости).

[4]точное определение отрезка (если оно Вам и так не очевидно) см. немного ниже

Задача 2.21. Поверхность 4-мерного куба состоит из 3-мерных кубов-граней, а стало быть в трёхмерном пространстве можно сделать развёртку 4-мерного куба, подобную известной плоской развёртке для склеивания трёхмерного кубика. Нарисуйте 3-мерную развёртку 4-мерного куба и снабдите её указаниями по склейке (разумеется, реализация этих указаний будет возможна лишь в 4-мерном пространстве).

3.1.2. Топология. *Стандартной топологией* на конечномерном аффинном вещественном пространстве мы будем называть ту, в которой *открытыми* являются множества, содержащие вместе с каждой своей точкой и некоторый ε-куб с центром в этой точке. Формально, такое определение зависит от фиксации координат.

Задача 2.22. Докажите, что при фиксированных координатах описанный только что класс открытых множеств действительно удовлетворяет аксиомам топологии, а также докажите, что при выборе других координат получится тот же самый класс открытых множеств.

Дополненеия до открытых множеств называются *замкнутыми* множествами.

Задача 2.23. Докажите, что замкнутость равносильна тому, что в месте с каждой сходящейся последовательностью точек множество содержит также и предел этой последовательности.

Легко видеть, что сходимость в стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^n$ означает в точности покоординатную сходимость.

Для всякой фигуры Φ определим совокупность её *внутренних* точек

$$\overset{\circ}{\Phi} = \{x \in \Phi \mid \exists \varepsilon > 0 : Q(x,\varepsilon) \subset \Phi\}$$

и *замыкание* $\bar{\Phi}$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих Φ. *Внешними* точками Φ будем называть внутренние точки дополнения до Φ. Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат ли они фигуре Φ.

Задача 2.24. Убедитесь, что точка является граничной тогда и только тогда, когда в любом ε-кубе с центром в этой точке лежат как точки из Φ, так и точки, не принадлежащие Φ.

3.2. Выпуклые оболочки. Будем называть барицентрическую комбинацию

$$\sum \lambda_\nu p_\nu\ , \quad \text{где} \quad \sum \lambda_\nu = 1\ ,$$

точек p_ν *выпуклой*, если все её коэффициенты неотрицательны: $\lambda_\nu \geq 0\,\forall \nu$. Совокупность всех выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{Conv}\Phi$.

3.2.1. Симплексы. Выпуклая оболочка $k+1$ точек $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k$, не лежащих ни в какой $(k-1)$-мерной плоскости, называется k-мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k] = \{\, q = \sum \lambda_\nu p_\nu \mid \quad \sum \lambda_\nu = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_\nu \geq 0 \ \forall \nu\}.$$

В частности 1-мерный симплекс

$$[ab] = \{q = \lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0\}$$

называется *отрезком* с концами в точках a и b.

> Задача 2.25. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\,]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1},\, p_{\nu_2},\, \dots,\, p_{\nu_m}]$ с $m < n$ и $\nu_i \in \{0,\, 1,\, \dots,\, n\}$ и подсчитайте количесиво граней в каждой размерности.

3.3. Определение. *Множество точек в вещественном аффинном пространстве называется выпуклым, если вместе с каждыми двумя точками оно содержит и отрезок с концами в этих точках.*

3.4. Простейшие свойства выпуклых множеств. Прежде всего заметим, что выпуклое множество содержит не только любые отрезки с концами в принадлежащих этому множеству точках, но и вообще любые выпуклые комбинации своих точек (надо воспользоваться индукцией по количеству точек, участвующих в комбинации и применить теорему о группировании масс).

> Задача 2.26. Убедитесь, что пересечение выпуклых множеств выпукло, и что выпуклая оболочка фнгуры может быть определена как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих эту фигуру.

Далее, если точки a_i сходятся к a, а точки b_i — к b, то при любых фиксированных λ, μ с единичной суммой точки $\lambda a_i + \mu b_i$ сходятся к точке $\lambda a + \mu b$. Поэтому *замыкание выпуклого множества выпукло.*

Если точки a и b лежат в выпуклом множестве M вместе с некоторыми своими кубическими окрестностями, то множеству M будут принадлежать и кубические окрестности всех точек отрезка $[ab]$ (см. рис. 2–B). Поэтому *внутренность выпуклого множества выпукла.*

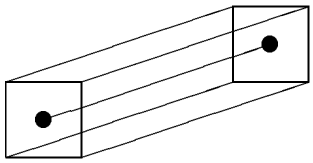

Рис. 2–B. Выпуклость внутренности.

> Задача 2.27. Пусть U —открытое выпуклое множество, и $O \notin U$. Убедитесь, что конус $C(O,U)$, являющийся объединением всех открытых лучей $]OP)$ с $P \in U$, также будет открытым выпуклым множеством.

Конус, о котором шла речь в задаче, обладает замечательным свойством: каждая прямая, проходящая через O либо вообще его не пересекает, либо пересекает так, что по одну сторону от O все точки этой прямой будут внутренними для $C(O,U)$, а по другую сторону от O — все точки будут внешними (это вытекает из выпуклости конуса и того, что точка O ему не принадлежит). Отсюда сразу следует такая

3.4.1. Лемма. *В аффинном пространстве, размерность которого не менее 2, через точку, не принадлежащую открытому выпуклому множеству, можно провести прямую, не пересекающую это множество.*

Доказательство. Воспользуемся предыдущими обозначениями и рассмотрим замыкание Z конуса $C(O,U)$. Предыдущее замечание показывает, что имеется точка X, внешняя для Z. Проведя через неё прямую, отличную от (OX), но пересекающую Z, мы сможем найти на этой прямой точку $Q \neq O$, граничную для Z. Прямая (OQ) — искомая, т.к. если бы она пересекала $C(O,U)$, то точка Q была бы для $C(O,U)$ либо внешней, либо внутренней, но не граничной. □

> Задача 2.28. Убедитесь, что для одномерных пространств лемма неверна, и укажите в доказательстве место, где использовалась многомерность.

3.5. Опорные полупространства. Для всякого аффинного функционала a на аффинном пространстве $\mathbb{A}$ рассмотрим множества:

$$H_a = \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) = 0\} ,$$
$$H_a^+ = \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) \geq 0\} ,$$
$$H_a^- = \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) \leq 0\} .$$

H_a является гиперплоскостью в $\mathbb{A}$. Она разбивает $\mathbb{A}$ на два непустых открытых выпуклых подмножества

$$\overset{\circ}{H}{}_a^+ = \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) > 0\}$$
$$\overset{\circ}{H}{}_a^- = \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) < 0\}$$

общей границей которых сама и является.

Всё сказанное вытекает из следующей альтернативы для ограничения аффинного линейного функционала a на отрезок $[pq]$: либо a тождественно зануляется на $[pq]$, либо имеет всюду на $[pq]$ постоянный знак, либо обращается в нуль в *единственной* точке, причём эта точка тогда и только тогда является внутренней для отрезка, когда a имеет разные знаки на концах. Далее мы всё время будем использовать эту альтернативу.

Исключительную важность для дальнейшего имеет

3.5.1. Лемма. *Через любую (в том числе нульмерную) аффинную плоскость π, не пересекающую открыторого выпуклого множества U, можно провести гиперплоскость, также не пересекающую U.*

Доказательство. Можно считать, что дело происходит в аффинизации $\mathrm{Aff}(V)$ векторного пространства V, и что $\pi = \mathrm{Aff}(W)$ для некоторого векторного подпространства $W \subset V$. Пусть $H \subset V$ — подпространство наибольшей размерности из всех, содержащих W и не пересекающих U. Представим V в виде $V = H \oplus H_1$ с подходящим H_1, и выберем в V базис, согласованный с таким разложением. Нам надо показать, что $\dim H_1 = 1$.

Спроектируем V на H_1 вдоль H. Поскольку отрезки при этом перейдут в отрезки, а кубы — в кубы, множество U спроектируется в открытое выпуклое множество, которое не содержит нуля (т.к. прообраз нуля H не пересекался с U), но пересекается с каждой прямой, проходящей через O (по максимальности H). В предыдущем пункте мы видели, что такое бывает только в одномерном пространстве. □

3.5.2. Следствие. *Через каждую граничную точку x выпуклого множества M проходит замкнутое полупространство H_a^+, содержащее M.*

Доказательство. Случай, когда M лежит в плоскости, очевиден. В остальных случаях у M есть непустая внутренность (ибо у полномерного симплекса есть внутренность). Проведём через x гиперплоскость H_a, не пересекающую внутренность M. Функционал a не может менять знак на $\overset{\circ}{M}$ вследствии выпуклости $\overset{\circ}{M}$ (ибо соединив точки разного знака отрезком, получим на этом отрезке нуль функционала, т.е. точку из H_a). Меняя, если надо, знак у a, получаем $M \subset H_a^+$, что и требовалось.

Полупространство H_a^+ называется *опорным полупространством*, а функционал a — *опорным функционалом* множества M в точке x. Аналогично, опорной называется и гиперплоскость H_a.

3.6. Теорема. *Всякое замкнутое выпуклое множество является пересечением своих опорных полупространств.*

Доказательство. Индукция по размерности сводит всё к случаю, когда рассматриваемое множество M имеет непустую внутренность. Мы должны проверить, что каждая внешняя точка $q \notin M$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств. Соединим q отрезком $[qp]$ с некоторой внутренней точкой p множества M и проведём опорное полупространство H_a^+ к M в граничной точке x множества M, лежащей на отрезке $[qp]$. Тогда $a(p) > 0$ и $a(x) = 0$ влекут, что $a(q) < 0$, т.е. $q \notin H_a^+$, что и требовалось.

Поскольку пересечение полупространств, очевидно, является замкнутым выпуклым множеством, мы получаем, что *классы замкнутых выпуклых множеств и множеств, представимых в виде пересечения полупространств, совпадают.*

3.7. Грани и крайние точки. Пусть M — замкнутое выпуклое множество. Пересечение M с любой своей опорной гиперплоскостью называется *гранью*[5] M. Всякая грань также является замкнутым выпуклым множеством, причём лежит в аффинном пространстве меньшей размерности, чем исходное. Размерностью грани называется размерность её аффинной оболочки. По отношению к стандартной топологии этой аффинной оболочки имеет смысл говорить о внутренних, внешних и граничных точках грани. Нульмерные грани (т.е. грани-точки) называются *вершинами*.

> Задача 2.29. Приведите пример, показывающий, что грань грани может не быть гранью для исходной фигуры.

Точка $p \in M$ называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком содержащегося в M. Если M замкнуто и выпукло, то его крайние точки — это вершины и только они. Действительно, если $p = H_a \cap M$ — вершина, то функционал a строго положителен на M всюду вне p, а значит p может быть лишь концом для отрезка из M (вспомните альтернативу!). Обратно, всякая крайняя точка лежит на границе M, а значит — на грани. Аналогично, она лежит и на границе этой грани, т.е. на грани грани и т.д. Грани, не имеющие нетривиальных граней — это вершины.

Приведённое только что рассуждение называется “выдавливанием на грань” и часто используется при исследовании выпуклых фигур (обычно в сочетании с индукцией по размерности).

3.8. Теорема. *Выпуклое замкнутое ограниченное множество совпадает с выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Доказательство. Внутренние точки ограниченного замкнутого выпуклого множества лежат в выпуклой оболочке граничных (для данной внутренней точки можно взять, к примеру, концы отрезка, высекаемого множеством на произвольной прямой, проходящей через эту точку). Все граничные точки лежат в гранях, а стало быть в выпуклой оболочке граней граней и т.д. пока не дойдём до вершин. □

[5]Возможно, термин «грань» в контексте общих выпуклых фигур (не многогранников) не слишком удачен. К примеру, у окружности бесконечно много граней и все они нульмерны. Ещё более странно дело обстоит с фигурами типа .

§4. Выпуклые многогранники.

4.1. Определение. *Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств.*

На языке формул, выпуклый многранник является множеством решений конечной системы нестрогих линейных неоднородных неравенств. Отметим, что многранник не обязан быть ограниченным. Например, многранниками являются плоскости, ибо комбинация из двух неравенств, отличающихся знаком, равносильна уравнению.

Другим примером неограниченных многогранников являются *выпуклые полиэдральные конусы* — пересечения конечных наборов полупространств, проходящих через фиксированную точку — *вершину конуса*. Вместе со всякой точкой такой конус содержит и замкнутый луч с началом в вершине, проходящий через эту точку. Если ввести аффинные координаты с центром в вершине конуса, то выпуклый полиэдральный конус запишется системой линейных *однородных* неравенств.

4.2. Грани многранников. Пусть многогранник M задан как пересечение полупространств $H_1^+, H_2^+, \dots, H_m^+$, отвечающих функционалам $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тогда его грани также легко описать явно. В самом деле, всякое непустое пересечение

$$H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap M$$

каких-либо из ограничивающих многогранник гиперплоскостей с самим многогранником будет гранью для M, поскольку функционал $b = a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$ при условии непустоты пересечения является опорным для M и

$$H_b \cap M = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap M.$$

Наоборот, всякая грань $\Gamma \subset M$ представляется в таком виде. Чтобы получить это представление, занумеруем функционалы a_ν так, чтобы первые k из них тождественно обращались в нуль на Γ, а остальные $m-k$ были положительны хотя бы в одной точке на Γ. Тогда в центре тяжести $p \in \Gamma$ этих точек будет положителен каждый из них. Таким образом, грань Γ содержится в грани $\Phi = H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_k} \cap M$ и содержит точку p, которая является для этой грани Φ внутренней. Но тогда опорная плоскость, высекавшая Γ обязана содержать Φ: если функционал, задающий эту плоскость окажется положительным в какой либо точке $q \in \Phi$, то немного продлив отрезок $[qp]$ за точку p, мы построим точку $r \in \Phi$, для которой этот функционал станет отрицательным, что для опорной плоскости невозможно. Следовательно,

$$\Gamma = \Phi = H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_k} \cap M.$$

Сказанное можно подытожить в виде такого предложения:

4.2.1. Утверждение. *У выпуклого многогранника имеется лишь конечное число граней, и все они могут быть заданы как решения систем, получающихся из системы неравенств, определяющей сам многогранник, заменой некоторых неравенств на равенства.*

4.2.2. Следствие. *Выпуклый ограниченный многранник является выпуклой оболочкой конечного числа точек — своих вершин.*

Замечательно, что верно и обратное.

4.3. Теорема. *Минковского-Вейля В классе ограниченных замкнутых выпуклых множеств выпуклыми многогранниками являются выпуклые оболочки конечных наборов точек и только они.*

Доказательство. Мы должны проверить, что выпуклую оболочку конечного набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m$ можно задать конечным числом неравенств. При этом можно предполагать, что их аффинная оболочка — это всё пространство. Ясно, что $\mathrm{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)$ является пересечением бесконечного семейства полупространств H_a^+ со всевозможными a, удовлетворяющими условию $a(p_\nu) \geq 0 \ \forall \nu$. Так как точки не лежат в гиперплоскости, для каждого такого функционала a число $\sum a(p_\nu)$ строго положительно. Поскольку отличающиеся положительным множителем функционалы определяют одно и то же полупространство, мы можем (деля a на $\sum a(p_\nu)$) считать дополнительно, что $\sum a(p_\nu) = 1 \ \forall a$.

Следовательно, набор функционалов a, задающий $\mathrm{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)$, изображается в аффинном пространстве $\mathbb{F}$, ассоциированном с векторным пространством всех аффинных функционалов, фигурой

$$A = \{a \in \mathbb{F} \mid \sum a(p_\nu) = 1 \text{ и } a(p_\nu) \geq 0 \ \forall \nu\},$$

которая является выпуклым многогранником. Выбирая среди функционалов вычисления ev_{p_ν} аффинные координаты на $\mathbb{F}$, мы видим, что в этих координатах многогранник A оказывается лежащим в стандартном кубе (т.к. $\mathrm{ev}_{p_\nu}(a) = a(p_\nu) \leq 1$). Тем самым A — ограниченный многогранник, и является выпуклой оболочкой конечного числа своих вершин $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Это означает, что произвольный $a \in A$ представим в виде $a = \sum \lambda_\mu a_\mu$ с $\lambda_\mu \geq 0$, а стало быть, бесконечная система неравенств $a \geq 0$ является следствием конечной подсистемы $a_\mu \geq 0$, что и требовалось.

Задача 2.30. Докажите, что выпуклая оболочка конечного набора точек ограничена.

4.4. Максимумы аффинных функционалов. Из соображений непрерывности, всякий аффинный функционал a достигает максимального значения на ограниченном многограннике. Практическому отысканию этого максимума очень помогает то обстоятельство, что среди точек, в которых он достигается, обязательно имеются вершины. Действительно, записывая произвольную точку p многогранника в виде выпуклой барицентрической комбинации вершин p_ν, получаем

$$a(p) = a(\sum \lambda_\nu p_\nu) = \sum \lambda_\nu a(p_\nu),$$

что является выпуклой комбинацией точек на прямой $\mathbb{R}$ и лежит внутри отрезка с концами в максимальном и минимальном значении a на вершинах.

Реальный алгоритм для ЭВМ, вычисляющий максимальное значение функционала на многограннике, называется *симплекс-методом*, и состоит в движении по рёбрам многогранника до тех пор, пока при этом строго возрастает значение функционала. В вершине, из которой дальнейшее такое продвижение невозможно, и достигается максимум.

Задача 2.31. Обоснуйте правильность алгоритма и попытайтесь его запрограммировать.