Лекция 1
Векторные пространства

▷Векторные пространства ▷Порождающие наборы ▷Линейная зависимость ▷Базисы и координаты ▷Взаимное расположение подпространств ▷Прямые суммы ▷Сопряжённое пространство ▷Двойственные базисы ▷Аннуляторы векторных и ковекторных подпространств ▷Линейные операторы ▷Ядро и образ ▷Сопряжённый оператор ▷Ранг матрицы ▷Интерполяция

§1. Напоминание основных понятий

Напомню (см. лекцию 5 прошлого семестра), что векторное пространство над полем k — это *модуль* над этим полем, т.е. множество V, на элементах которого имеется ассоциативное, коммутативное и обладающее нулём и противоположными элементами *сложение векторов*, а также ассоциативное и дистрибутивное (как по отношению к сложению векторов, так и по отношению к сложению чисел) *умножение векторов на числа* из поля k, причём $\forall v\in V \;\; 1\cdot v = v$.

Подпространство в векторном пространстве V — это всякое подмножество, которое само является векторным пространством относительно операций, заданных на V. Чтобы $W\subset V$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы вместе с каждым своим вектором W содержало и все векторы, ему пропорциональные, а вместе с каждыми двумя векторами — их разность.

Гомоморфизмы векторных пространств, т.е. отображения $F\colon\; V \longrightarrow W$, удовлетворяющие условию

$$F(\lambda u+\mu v)=\lambda F(u)+\mu F(v) \quad \forall \lambda,\mu\in k\;\forall u,v\in V,$$

называются *линейными отображениями* или *линейными операторами*.

1.1. Линейные оболочки. Основными объектами изучения в линейной алгебре являются *линейные комбинации векторов*, т.е. выражения вида

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_m v_m, \qquad \text{где} \quad \lambda_\nu\in k\,,\; v_\nu\in V,$$

причём сумма *всегда предполагается конечной*. Наиболее частый вопрос, на который приходится отвечать, — это можно ли данные векторы выразить в виде линейной комбинации других данных векторов, и если да, то "сколькими способами". Для ответа на такой вопрос вводятся следующие понятия.

Набор векторов $\{e_\nu\}$ (возможно и бесконечный) называется *порождающим* подпространство W, если каждый вектор из W равен конечной линейной комбинации векторов e_ν. Всякий набор векторов $\{e_\nu\} \subset V$ всегда порождает некоторое подпространство, обозначаемое $\langle e_\nu \rangle$ и называемое его *линейной оболочкой*. Оно может быть описано как пересечение всех подпространств в V, содержащих набор $\{e_\nu\}$, или более конструктивно, как множество всех конечных линейных комбинаций из векторов e_ν.

Задача 1.1. Докажите, что оба описания действительно определяют подпространство, причём одно и то же.

Пространство, которое может быть порождено конечным набором $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ называется *конечномерным*. Каждый вектор такого пространства может быть представлен (возможно, многими способами) в матричном виде при помощи столбца из коэффициентов его линейного разложения по образующим:

$$v = \sum_{\nu=1}^{m} x^\nu e_\nu \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

1.1.1. Соглашения об индексах: случай векторов. В этих лекциях мы всегда будем записывать коэффициенты разложений векторов в виде столбцов и нумеровать их внутри столбца верхними индексами.

Наборы из векторов мы, наоборот, всегда будем записывать строчками, а нумеровать векторы в наборе будем нижними индексами.

В этих обозначениях запись $\left(a^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ изображает матрицу по столбцам которой стоят коэффициеты разложения векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ по какой-либо порождающей системе $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ из m векторов, так что a^i_j стоит в i-той строчке и j-том столбце и равен i-тому коэффициенту j-того вектора a_j.

Такая матрица $\left(a^i_j\right)$ называется матрицей набора $\{a_\nu\}$ в наборе $\{e_\mu\}$ или *матрицей перехода* от e к a, и обозначается C_{ea}. В терминах матричной алгебры имеет место равенство

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (e_1, e_2, \dots, e_m) C_{ea},$$

где под произведением вектора на число справа понимается обычное произведение вектора на число, т.е. $v \cdot \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda v$.

1.2. Линейная зависимость. Набор векторов (возможно и бесконечный) называется *линейно зависимым*, если из его векторов можно составить конечную линейную комбинацию, равную нулевому вектору, но имеющую ненулевые коэффициенты. Наоборот, если для любой конечной линейной комбинации векторов из данного набора из обращения её в нуль следует, что равны нулю все её коэффициенты, то такой набор называют *линейно независимым*.

1.2.1. Утверждение. *В пространстве, порождённом набором $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ всякий набор $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ из $n > m$ векторов линейно зависим.*

Доказательство. Вопрос об отыскании чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (не всех нулевых), для которых

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0,$$

в матричных обозначениях эквивалентен задаче отыскания ненулевого решения системы

$$C_{ea}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=0$$

из m линейных уравнений с $n > m$ неизвестными. Применяя к системе метод Гаусса, мы получим на выходе ступенчатую систему содержащую свободные переменные. Задав им ненулевые значения, мы как раз и построим требуемую нетривиальную линейную зависимость. □

1.3. Базисы и размерность. Линейно независимый порождающий набор называется *базисом*. Конечномерное пространство всегда обладает базисом: выкидывая из произвольного порождающего набора векторы, допускающие линейное выражение через остальные, мы в конце концов получим базис. Более того, предложение Утв.1.2.1 показывает, что все базисы данного векторного пространства V состоят из одинакового числа векторов. Это число называют *размерностью* и обозначают $\dim V$. При помощи предложения Утв.1.2.1 нетрудно получить следующие эквивалентные переформулировки понятий базиса и размерности, которые часто бывают удобны, и которыми я далее буду свободно пользоваться:

Задача 1.2. Докажите, чтопопарную эквивалентность всех перечисленных ниже свойств набора векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$:

а) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис в V;

б) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независим и теряет это свойство при добавлении любого вектора (т.е. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — максимальный по включению линейно независимый набор векторов);

в) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независим и в V нет линейно независимых наборов из большего количества векторов (т.е. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — максимальный по количеству векторов линейно независимый набор);

г) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — минимальный по включению порождающий набор;

д) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — минимальный по количеству векторов порождающий набор;

е) Каждый вектор $v \in V$ представляется в виде линейной комбинации векторов e_ν, причём все коэффициенты этой комбинации однозначно определяются по v.

Задача 1.3. Докажите, что следующие числа совпадают:

а) $\dim V$;

б) минимальное число векторов, порождающих V;

в) максимальное число линейно независимых векторов в V;

г) длина n наибольшей цепочки строго вложенных друг в друга подпространств в V:

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_{n-1} \supset V_n = \{0\}.$$

1.4. Координаты. Наборы столбцов высоты n из чисел поля k вида $\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$ составляют

n-мерное векторное пространство относительно покомпонентного сложения и умножения на числа. Оно называется *координатным* пространством и обозначается k^n.

Если в векторном пространстве V выбран базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, то (однозначное) сопоставление вектору его коэффициентов разложения по этому базису:

$$V \ni v = \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu e_\nu \qquad \mapsto \qquad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in k^n$$

устанавливает изоморфизм пространства V с координатным пространством k^n. Фиксация такого изоморфизма (зависящего от выбора базиса и только от него) называется *введением координат* на V, а сами столбцы $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ называют *координатами* соответствующих векторов v. Для того, чтобы набор векторов $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ в пространстве с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ также составлял базис, необходимо и достаточно, чтобы матрица $C_{e\tau}$ будет обратимой. При этом $C_{\tau e} = C_{e\tau}^{-1}$. В прошлом семестре мы видели, что обратимость матрицы равносильна её *невырожденности*, т.е. условию $\det C_{e\tau} \neq 0$.

Столбец координат (x_e) вектора v в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ связан со столбцом координат (x_τ) того же самого вектора, но в другом базисе $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, формулой $(x_e) = C_{e\tau}(x_\tau)$.

Задача 1.4. Проверьте все упомянутые матричные соотношения.

1.5. Подпространства. Если $V \subset W$ — подпространство, то по предложению Утв.1.2.1 $\dim V \le \dim W$. Любой базис в V можно дополнить до базиса в W, добавляя к нему векторы из произвольной наперёд заданной порождающей W системы векторов. Полученный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в W, в котором первые m векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ составляют базис в подпространстве V, называется *согласованным с подпространством* $V \subset W$.

Если $U, V \subset W$ — пара подпространств, то можно образовать, их *пересечение* $U \cap V = \{w \in W \mid w \in U \text{ и } w \in V\}$ и *сумму* $U + V = \{w = u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$.

Задача 1.5. Докажите, что сумма и пересечение подпространств — подпространства, а также убедитесь, что объединение двух подпространств, как правило, подпространством не является.

Итак, у нас есть цепочка вложений:

$$\{0\} \subset U \cap V \qquad \begin{matrix} U \\ \\ V \end{matrix} \qquad U + V \subset W\ .$$

1.5.1. Утверждение. *Пусть*

$$\begin{array}{rcll} \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} & - & \textit{базис в} & U \cap V, \\ \{e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_s\} & - & \textit{базис в} & U, \\ \{e_1, \ldots, e_m, v_1, \ldots, v_r\} & - & \textit{базис в} & V. \end{array}$$

Тогда $\{e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_r\}$ *будет базисом в сумме* $U + V$, *согласованным и с* U, *и с* V, *и с* $U \cap V$.

Доказательство. Очевидно, что векторы $\{e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_r\}$ порождают сумму $U + V$. Проверим, что они линейно независимы. Пусть

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_m e_m}_{e} + \underbrace{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_s u_s}_{u} + \underbrace{\nu_1 v_1 + \nu_2 v_2 + \cdots + \nu_r v_r}_{v} = 0$$

Равенство $u = -e - v$ показывает, что $u \in U \cap V$, а значит должен выражаться только через $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Следовательно в разложении $u = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_s u_s$ все коэффициенты — нули, и $u = 0$. По тем же причинам равны нулю и все коэффициенты у v, а стало быть предыдущее равенство имеет вид $e = 0$. Ввиду линейной независимости векторов e_i это означает, что и у e все коэффициенты нулевые. Предложение доказано.

1.5.2. Следствие. $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

1.5.3. Следствие. *Два подпространства в* V, *сумма размерностей которых больше* $\dim V$, *имеют ненулевое пересечение.*

Суммы и пересечения можно определить для любых наборов подпространств

$$U_1, U_2, \ldots, U_k \ \subset W\ .$$

Как и выше, они будут подпространствами в W.

1.5.4. Утверждение. *Следующие свойства подпространств* $U_1, U_2, \ldots, U_k$ *попарно равносильны:*

(i) $\forall i \ U_i \cap \sum_{\nu \neq i} U_\nu = \{0\}$;

(ii) $\dim(U_1 + \cdots + U_k) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$;

(iii) В представлении вектора $w \in U_1 + \cdots + U_k$ *в виде* $w = u_1 + \cdots + u_k$ *все компоненты* u_ν *однозначно определяются по* w.

Доказательство. Мы проделаем круг (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒ (i).

(ii) выводится из (i) многократным применением Сл.1.5.2.

Чтобы получить из (ii) утверждение (iii), выберем в каждом U_ν базис и объединим их все в один набор. Этот набор будет порождать сумму всех U_ν и по (ii) состоять ровно из стольких векторов, какова размерность этой суммы. Тем самым, он будет базисом суммы. Всякий вектор $u_i \in U_i$ при разложении по этому базису будет иметь ненулевые коэффициенты только при базисных векторах пространства U_i, и эти коэффициенты будут координатами u_i в U_i. Следовательно, вектор u_ν в разложении $w = u_1 + \cdots + u_k$ однозначно определяются по w как сумма тех слагаемых разложения w по только что построенному нами базису, которые содержатся в U_ν.

Наконец, если (i) неверно, и пространства U_i и $\sum_{\nu \neq i} U_\nu$ пересекаются по ненулевому вектору w, то это означает наличие двух разных разложений

$$w = u_i = \sum_{\nu \neq i} u_\nu,$$

противоречащих (iii). Таким образом, из (iii) следует (i), что и завершает доказательство. □

В ситуации, когда подпространства $U_1, U_2, \ldots, U_k$ удовлетворяют предыдущему предложению, их сумма называется *прямой* и обозначается

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \qquad \text{или} \qquad \bigoplus_{\nu=1}^{k} U_\nu .$$

§2. Двойственность

2.1. Линейные функционалы. Пусть в векторном пространстве V выбраны координаты (x^i). Тогда на V можно рассмотреть *линейное уравнение*:

$$\sum a_\nu x^\nu = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0. \tag{2-1}$$

Его решением будет подпространство в V, состоящее из векторов с координатами удовлетворяющими написанному равенству. Важное наблюдение состоит в том, что не только решения, но и сами уравнения, а точнее, — их левые части $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ составляют векторное пространство: их можно складывать друг с другом и умножать на числа. Удобнее, однако, иметь дело не с пространством "левых частей уравнений", а с пространством функций $\alpha(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, причём неплохо бы определить нужный класс функций *инвариантно*, т.е. не прибегая к координатам (ибо только такие определения имеют геометрический смысл).

2.2. Определение. *Функция $\alpha\colon\ V \longrightarrow k$ из векторного пространства в основное поле k называется линейным функционалом, если она является гомоморфизмом векторных пространств, т.е. удовлетворяет условиям:*

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda v) &= \lambda\alpha(v) \qquad \forall \lambda \in k,\ \forall v \in V \\ \alpha(v+w) &= \alpha(v) + \alpha(w) \qquad \forall\, v, w \in V \end{aligned}$$

> Задача 1.6. Проверьте, что линейные функционалы составляют векторное пространство относительно стандартных операций поточечного сложения значений и умножения их на числа.

Пространство линейных функционалов на векторном пространстве V называется *двойственным, дуальным* или *сопряжённым* к векторному пространству V и обозначается V^*. Элементы V^* в ситуациях, когда они рассматриваются как элементы векторного пространства, а не как функции, называются *ковекторами* — специально, чтобы подчеркнуть, что векторы и ковекторы лежат в физически разных пространствах (это особенно важно при одновременной работе с V и V^*).

2.2.1. Утверждение. *Если в пространстве V выбран базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, то функции координат относительно этого базиса:*

$$e^i : v = \sum x^\nu e_\nu \longmapsto e^i(v) \stackrel{\text{def}}{=} x^i$$

будут линейными функционалами на V и составят базис в V^*.

Доказательство. То, что координаты являются линейными функционалами, — очевидно. Далее, для координатных функционалов выполнено равенство:

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j,$$

где через δ_{ij} здесь и далее обозначается так называемый *δ-символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{при} \quad i \neq j \\ 1 & , \quad \text{при} \quad i = j \end{cases} .$$

Из написанных равенств легко получить линейную независимость функций e^ν: если какая либо линейная комбинация $\varphi = \sum \lambda_\nu e^\nu$ является тождественно нулевым функционалом на V, то, в частности, нулевыми будут и все значения $\varphi(e_i)$ на базисных векторах, что по предыдущей формуле приводит к равенствам:

$$0 = \varphi(e_i) = \sum_\nu \lambda_\nu e^\nu(e_i) = \lambda_i \qquad \forall i.$$

Аналогично получается и линейное разложение произвольного функционала $\alpha \in V^*$ по функционалам e^i. $\forall v \in V$ имеем:

$$\alpha(v) = \alpha(\sum_\mu x^\mu e_\mu) = \sum_\mu x^\mu \alpha(e_\mu) = \sum_\mu \alpha(e_\mu) e^\mu(v).$$

Это равенство означает, что $\alpha = \sum a_\mu e^\mu$, где константы $a_\mu = \alpha(e_\mu)$ суть значения разлагаемого функционала α на базисных векторах V. □

2.2.2. Следствие. *Если V конечномерно, то $\dim V = \dim V^*$.*

Базис из координатных функционалов $\{e^i\}$ называется *двойственным* или *сопряжённым* базисом к исходному базису $\{e_i\}$ пространства V.

2.3. Рефлексивность. Уравнение (2-1) замечательно симметрично по переменным a-x: мы можем фиксировать ковектор α и решать (2-1) в пространстве V, а можем наоборот — фиксировать v и решать (2-1) относительно α в V^*. Иначе говоря, число $\alpha(v) \in k$ можно воспринимать и как значение функционала α на векторе v и как значение *функционала вычисления* $\mathrm{ev}_v \in \left(V^*\right)^*$ на ковекторе α:

$$\mathrm{ev}_v : \ V^* \longrightarrow k \ : \quad \alpha \mapsto \alpha(v).$$

Задача 1.7. Убедитесь, что ev_v действительно является линейным функционалом на V^*.

Пространство $\left(V^*\right)^*$ короче обозначается как V^{**} и называется *дважды двойственным* к V.

2.3.1. Утверждение. *Отображение $\mathrm{ev} \ : \ V \longrightarrow V^{**}$, сопоставляющее векторам $v \in V$ функционалы вычисления $\mathrm{ev}_v \in V^{**}$, является инъективным линейным оператором, а если V конечномерно, то даже изоморфизмом.*

Доказательство. То, что отображение $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ линейно, проверяется без затей:

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\lambda v+\mu w}(\alpha) &= \alpha(\lambda v+\mu w) = \lambda\alpha(v)+\mu\alpha(w) = \lambda\mathrm{ev}_v(\alpha)+\mu\mathrm{ev}_w(\alpha) = \\ &= [\lambda\mathrm{ev}_v+\mu\mathrm{ev}_w](\alpha) \quad \forall\alpha\in V^*\end{aligned}$$

означает, что $\mathrm{ev}_{\lambda v+\mu w} = \lambda\mathrm{ev}_v+\mu\mathrm{ev}_w$.

Чтобы проверить, что ev — вложение, заметим, что равенство $\mathrm{ev}_v = \mathrm{ev}_w$ равносильно равенству $\mathrm{ev}_{v-w} = 0$. которое означает, что $\alpha(v-w) = 0\ \forall\alpha$. Но для любого ненулевого вектора $u\in V$, $u\neq 0$ легко построить линейный функционал $\alpha\in V^*$, такой что $\alpha(u)\neq 0$: достаточно дополнить u до базиса в V и взять в качестве α координату вдоль u (продумайте сами, что всё это означает в бесконечномерном случае!).

Наконец, чтобы убедиться, что в конечномерном случае ev является изоморфизмом между V и V^{**}, выберем в V базис $\{e_\nu\}$, в V^* — двойственный базис $\{e^\nu\}$. Сравнение определений показывает, что отображение ev переводит базисные векторы e_ν в точности в базисные векторы сопряжённого к $\{e^\nu\}$ базиса V^{**}. Предложение доказано.

Итак, все конечномерные пространства разбиваются в пары сопряжённых V-V^*. Роль обоих пространств в каждой такой паре абсолютно симметрична, и каждое из них может рассматриваться как пространство линейных функционалов на другом. При работе с такой парочкой удобно использовать более симметричное обозначение для числа $\alpha(v)$, отражающее обе возможности это число истолковывать. Для $\alpha\in V^*$ и $v\in V$ положим

$$\langle\alpha, v\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \alpha(v)$$

и будем называть это число *свёрткой* вектора v с ковектором α.

2.3.2. Замечания по поводу бесконечномерных пространств. Типичным примером "алгебраического" бесконечномерного векторного пространства является пространство многочленов $k[x]$, изоморфное координатному пространству k^∞ бесконечных вниз столбцов (x^ν), $\nu = 0, 1, 2, \dots$, имеющих лишь конечное число ненулевых координат. Если фиксировать в $k[x]$ стандартный базис $e_\nu = x^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, то координатные функционалы e^ν, сопоставляющие многочлену его коэффициент при x^ν, как и выше, будут линейно независимы, но *не будут порождать* $k[x]^*$: например, функционал, сопоставляющий многочлену сумму его коэффициентов, не представим в виде *конечной* линейной комбинации e^ν. Аналогично усматривается, что каноническое вложение $V \longrightarrow V^{**}$ не эпиморфно.

Философское объяснение перечисленным явлениям состоит в том, что в бесконечномерном случае всегда имеется дополнительное направление для ухода на бесконечность — по номерам базисных векторов. Вот одно из ярких проявлений этой возможности: последовательность стандартных базисных векторов e_ν пространства k^∞ по всем интуитивным признакам располагается на единичной сфере, но при этом не имеет предельных точек (ни в каком интуитивно-разумном смысле), т.е. единичная сфера в бесконечномерном пространстве не компактна!

В функциональном анализе эти проблемы обходятся за счёт введения разного рода предельных условий на поведение значений функционалов при стремлении к бесконечности по ν, инвариантный смысл которых состоит в том, что в качестве V^* берут не всю совокупность линейных функционалов, а например, только функционалы, ограниченные на единичной сфере. Подробности вы узнаете из соответствующего курса анализа.

2.3.3. Соглашения об индексах: случай ковекторов. Для записи ковекторов в матричном виде удобно ввести соглашения, симметричные тем , которые ранее были введены для векторов. А именно, численные коэффициенты разложения ковекторов по ковекторным базисам мы будем записывать матрицами-строками и нумеровать нижними индексами, тогда как наборы ковекторов будем записывать в столбцы и нумеровать в пределах столбца верхними индексами. Именно такой способ записи унифицируется с ранее введённым для векторов, поскольку координаты векторов сами являются ковекторами и наоборот, векторы можно рассматривать как координаты ковекторов в сопряжённом базисе.

2.4. Аннуляторы. Если вместо одного уравнения (2-1) рассматривается ситема линейных однородных уравнений, то её решение в пространстве V есть множество общих нулей набора ковекторов, а её решение в пространстве V^* есть множество ковекторов, зануляющихся на данном наборе векторов. Обе эти интерпретации содержатся в понятии аннулятора.

Пусть $W \subset V$ — некоторое подпространство; его *аннулятором* называется следующее подмножество $\mathrm{Ann}\,(W)$ в сопряжённом пространстве:

$$\mathrm{Ann}\, W = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}.$$

2.4.1. Утверждение. $\mathrm{Ann}\, W$ *есть подпространство в* V^* *и* $\dim \mathrm{Ann}\, W = \dim V - \dim W$.

Доказательство. Выберем в V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, так чтобы первые k векторов

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

составляли базис в W, и пусть $\{e^\nu\}$ —двойственный базис в V^*. Функционал $\alpha = \sum a_\nu e^\nu$ тогда и только тогда обращается тождественно в нуль на W, когда он зануляется на базисных векторах $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ пространства W, что равносильно выполнению следующих k равенств:

$$0 = \alpha(e_j) = \sum_\nu a_\nu e^\nu(e_j) = a_j \qquad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Таким образом, $\mathrm{Ann}\, W$ есть линейная оболочка $\langle e^{k+1}, e^{k+2}, \dots, e^n \rangle$ в V^*. Предложение доказано.

2.4.2. Следствие. $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, W = W$.

Доказательство. Очевидно, $W \subset \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, W$ и

$$\dim \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, W = \dim V^* - \dim \mathrm{Ann}\, W = \dim V^* - \dim V + \dim W = \dim W.$$

Итак, между j-мерными подпространствами в V и $(n-j)$-мерными подпространствами в V^* имеется естественная биекция, сопоставляющая друг другу подпространства, являющиеся друг для друга аннуляторами.

Аннулятор можно было бы определить не только для подпространства, но и для любого подмножества векторов в векторном пространстве. Однако это не приведёт к чему-либо существенно новому.

> Задача 1.8. Докажите, что аннулятор произвольного набора векторов совпадает с аннулятором их линейной оболочки (в частности, линейная оболчка произвольного подмножества векторов $M \subset V$ совпадает с $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, M$).

§3. Линейные операторы

Напомню, что *линейным оператором* называется всякое отображене $F\colon\ V \longrightarrow W$ между векторными пространствами V и W, которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= \lambda F(u) && \forall \lambda \in k\ \forall v \in V, \\ F(u+v) &= F(u)+F(v) && \forall u,v \in V. \end{aligned}$$

Если линейный оператор переводит разные векторы в разные, то он называется *вложением*, *мономорфизмом* или *инъективным оператором*. *Эпиморфизмами*, *наложениями* или *сюрьекциями* называются операторы, отображающие V на всё W. Взаимно-однозначпые линейные отображения называются *изоморфизмами*.

Совокупность всех линейных операторов из пространства V в прорстранство W обозначается $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Задача 1.9. Проверьте, что $\mathrm{Hom}(V,W)$ является векторным пространством относительно стандартных поточечных операций над отображениями.

Задача 1.10. Докажите, что линейный оператор F тогда и только тогда является вложением, когда $F(v)=0$ лишь для $v=0$.

3.1. Ядро и образ. Как и со всяким гомоморфизмом, с линейным оператором $F\colon\ V \longrightarrow W$ можно связать

ядро $\ker F = \{v\in V \mid F(v)=0\} \subset V$,

образ $\operatorname{im} F = \{w\in W \mid \exists v\in V\colon F(v)=w\} \subset W$.

Легко проверить, что это векторные пространства.

Задача 1.11. Сделайте эту проверку.

3.2. Лемма. *Для произвольного линейного оператора* $F\colon\ V \longrightarrow W$ *можно так выбрать базисы* $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ *в* V *и* $\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m\}$ *в* W, *чтобы*

$$F(e_\nu) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{при}\quad \nu = 1,\ \dots,\ k \\ \tau_{\nu-k} & ,\ \text{при}\quad \nu=(k+1),\ \dots,\ n \end{cases},$$

где $k = \dim\ker F$.

Доказательство. Выберем в V базис $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ так, чтобы первые k векторов

$$\{e_1,e_2,\dots,e_k\}$$

составляли базис в $\ker F$. Тогда векторы $F(e_\nu)$ с $\nu \geq (k+1)$ будут линейно независимы в W.

Действительно, пусть

$$0 = \sum_{\nu\geq k+1} \lambda_\nu F(e_\nu) = F(\sum_{\nu\geq k+1} \lambda_\nu e_\nu).$$

Тогда вектор $\sum\limits_{\nu\geq k+1} \lambda_\nu e_\nu \in \ker F$, а стало быть лежит в линейной оболочке векторов e_ν с $\nu \leq k$. Это возможно, только когда все коэффициенты нулевые.

Полагая $\tau_\mu = F(e_{\mu-k})$ (где $\mu \geq k$), и дополняя эту линейно независимую систему векторов до базиса в W, получим требуемое.

3.2.1. Следствие. $\dim\ker F + \dim\operatorname{im} F = \dim V \quad \forall F\colon\ V \longrightarrow W$.

3.2.2. Следствие. *Пусть* $\dim V = \dim W = n$. *Следующие свойства линейного оператора* $F\colon\ V \longrightarrow W$ *попарно эквивалентны:*

(i) F — *изоморфизм;*

(ii) $\ker F = 0$*;*

(iii) $\dim \operatorname{im} F = n$.

3.3. Матрицы операторов. Пусть в пространствах V и W фиксированы базисы

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \qquad \text{и} \qquad \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$$

соответственно. Тогда с каждым оператором $F\colon\ V \longrightarrow W$ можно связать матрицу $F_{\tau e} = \left(f^i_j\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ по столбцам которой стоят координаты векторов $F(e_j)$ в базисе $\{\tau_i\}$, так что имеет место матричная формула:

$$\Big(F(e_1),\ \dots,\ F(e_n)\Big) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)F_{\tau e}.$$

Эта матрица удобна при вычислении координат образов векторов, если заданы координаты самих векторов. Действительно, пользуясь линейностью F, находим $\forall v = \sum x^i e_i \in V$:

$$F(v) = \Big(F(e_1),\ \dots,\ F(e_n)\Big)\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)F_{\tau e}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix}.$$

Поэтому в координатах действие F задаётся формулой:

$$F\colon\ \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto F_{\tau e}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix}$$

Задача 1.12. Докажите, что при выборе в V другого базиса $(u) = (e)C_{eu}$, а в W — другого базиса $(\sigma) = (\tau)C_{\tau\sigma}$, матрица оператора F преобразуется по формуле

$$F_{\sigma u} = C_{\sigma\tau}F_{\tau e}C_{eu} = C_{\sigma\tau}F_{\tau e}C^{-1}_{ue} = C^{-1}_{\tau\sigma}F_{\tau e}C_{eu}$$

3.3.1. Матричные единицы. Несколько иной смысл коэффициентам $\left(f^i_j\right)$ матрицы $F_{\tau e}$ оператора F можно придать, если рассмотреть в пространстве $\operatorname{Hom}(V, W)$ специальный базис (построение которого будет зависеть от выбора базисов в V и W). Обозначим через ε^i_j следующее отображение из V в W:

$$\varepsilon^i_j\colon\ v = \sum x^\nu e_\nu \ \longmapsto\ x^i\tau_j \in W.$$

Иными словами, отображение ε_j^i переводит всякий вектор $v \in V$ в базисный вектор τ_j пространства W, умноженный на i-тую координату v в пространстве V (в частности, $\operatorname{im} \varepsilon_j^i = \langle \tau_j \rangle$ одномерен).

Задача 1.13. Проверьте, что ε_j^i — линейные операторы.

Операторы ε_j^i называются *матричными единицами* относительно выбранных в V и W базисов. По причинам, которые мы обсудим позднее, их также обозначают через $e^i \otimes \tau_j$.

3.3.2. Утверждение. *Матричные единицы составляют базис в* $\operatorname{Hom}(V, W)$ *(так что, в частности,* $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \dim W$*). Коэффициентами разложения произвольного оператора F по этому базису являются элементы матрицы этого оператора, взятые с транспонированными индексами:*

$$F = \sum_{i,j} f_j^i \varepsilon_i^j\,, \qquad \text{где } \left(f_j^i\right) = F_{\tau e}.$$

Доказательство. То что F и $\sum_{i,j} f_j^i \varepsilon_j^i$ одинаково действуют на произвольный вектор $v \in V$ проверяется непосредственно: $\forall v = \sum\limits_\nu x^\nu e_\nu$ имеем:

$$F(v) = \sum_\nu x^\nu F(e_\nu) = \sum_{\nu\,\mu} x^\nu f_\nu^\mu \tau_\mu = \sum_{\nu\,\mu} f_\nu^\mu \varepsilon_\mu^\nu(v).$$

Таким образом, матричные единицы порождают $\operatorname{Hom}(V, W)$. Их линейная независимость проверяется точно также, как линейная независимость ковекторов сопряжённого базиса, если учесть, что

$$\varepsilon_j^i(e_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq i \\ \tau_\nu & \text{при } \nu = i \end{cases}.$$

Если $\sum_{i,j} \lambda_i^j \varepsilon_j^i = 0$, то $\forall k$ имеем:

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_i^j \varepsilon_j^i(e_k) = \sum_j \lambda_k^j \tau_j.$$

Поэтому все $\lambda_k^j = 0$. □

Задача 1.14. Докажите, что отображение, сопоставляющее линейному оператору его матрицу, является изоморфизмом пространства операторов и пространства матриц.

Задача 1.15. Докажите, что матрица композиции операторов равна произведению матриц самих операторов (в том же порядке).

3.4. Сопряжённый оператор. С каждым оператором $F\colon\ V \longrightarrow W$ можно связать так называемый *сопряжённый оператор* $F^*\ :\ W^* \longrightarrow V^*$, действующий на двойственные пространства в противоположном направлении. По определению, F^* переводит линейные функционалы на W в их композицию с отображением F. При этом будут получаться линейные функционалы на V, действие которых на векторы $v \in V$ задаётся формулой:

$$F^*\varphi(v) \overset{\text{def}}{=} \varphi(F(v)) \qquad \forall \varphi \in W^*,$$

или с использованием более симметричного символа свёртки:

$$\langle F^*\varphi, v\rangle_V = \langle \varphi, Fv\rangle_W, \tag{3-2}$$

(где индексы V и W указывают, в какой паре двойственных пространств делается свёртка).

Задача 1.16. Докажите, что отождествляя пространства V, W с дважды двойственными, мы получим равенство $F^{**} = F \quad \forall F \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Равенство (3-2) показывает, что условие $F^*\varphi = 0$ равносильно условию $\varphi \in \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F$. Поэтому $\ker F^* = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F$. Если подставить в это равенство вместо F оператор F^* и воспользоваться тем, что $F^{**} = F$, мы получим двойственное соотношение $\ker F = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F^*$, которое равносильно, как мы знаем, соотношению $\mathrm{im}\,F^* = \mathrm{Ann}\ \ker F$. Мы доказали

3.4.1. Утверждение. $\ker F^* = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F \qquad \mathrm{im}\,F^* = \mathrm{Ann}\ \ker F$.

Задача 1.17. Докажите, что отображение $F \longmapsto F^*$ является изоморфизмом пространств $\mathrm{Hom}(V,W)$ и $\mathrm{Hom}(W^*,V^*)$.

Задача 1.18. Докажите, что $\Big(F \circ G\Big)^* = G^* \circ F^*$.

3.4.2. Матрица сопряжённого опрератора. Если выбрать в V и V^* двойственные базисы $\{e_\nu\}$ и $\{e^\nu\}$, а в W и W^* — базисы $\{\tau_\mu\}$ и $\{\tau^\mu\}$, то оператору F^* можно сопоставить матрицу $F^*_{\tau e}$, строки которой будут строками координат образов $F^*\tau^\mu$ базисных ковекторов τ^μ в базисе $\{e^\nu\}$, так что

$$\begin{pmatrix} F^*\tau^1 \\ F^*\tau^2 \\ \vdots \\ F^*\tau^m \end{pmatrix} = F^*_{\tau e} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}.$$

Число f^{*i}_j, стоящее в i-той строчке и j-том столбце матрицы $F^*_{\tau e}$ есть по определению результат действия функционала $e_j \in V = V^{**}$ на ковектор $F^*\tau^i$, что равно

$$\langle F^*\tau^i, e_j\rangle_V = \langle \tau^i, Fe_j\rangle_W = f^i_j,$$

т.е. матрицы $F_{\tau e}$ и $F^*_{\tau e}$ совпадают.

3.5. Пример: ранг матрицы. Произвольную матрицу $\left(a^i_j\right)_{\substack{1\le i \le m\\ 1\le j\le n}}$ можно рассматривать как матрицу линейного оператора $A\ :\ k^n \longrightarrow k^m$ (и, соответственно, как матрицу двойственного оператора $A^*\ :\ k^{m*} \longrightarrow k^{n*}$). При такой интерпретации линейная оболочка строк матрицы A будет образом оператора A^* в k^{n*}, а линейная оболочка столбцов — образом самого оператора A в k^m. Размерности этих пространств иногда называют, соответственно, строчным и столбцовым *рангом* матрицы A. Равенства

$$\dim\,\mathrm{im}\,A^* = m - \dim\,\ker A^* = m - \dim\,\mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,A = m - (m - \dim\,\mathrm{im}\,A) = \dim\,\mathrm{im}\,A$$

показывают. что строчный ранг совпадает со столбцовым. Поэтому это число чаще называют просто *рангом матрицы* A и обозначают $\mathrm{rk}\,A$.

Задача 1.19. Докажите, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов (а следовательно, может быть вычислен приведением матрицы к диагональному виду одновременными преобразованиями строк и столбцов).

Задача 1.20. (Теорема об окаймляющих минорах.) Пусть матрица A содержит невырожденную квадратную подматрицу размера $m \times m$, такую что все содержащие её подматрицы размера $(m+1) \times (m+1)$ вырождены. Докажите, что $\operatorname{rk} A = m$.

3.6. Пример: интерполяция. Задача интерполяции с кратными узлами заключается в следующем. Пусть задан набор точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с целыми положительными кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_k$, и для каждой точки x_j указано m_j значений $y_{j\,0}$, $j_{j\,1}$, $\ldots$, $y_{j\,m_{j-1}}$. Требуется подобрать такую функцию $y = f(x)$, чтобы в каждой из точек x_j она сама и первые её $m_j - 1$ производных принимали требуемые значения $y_{j\nu}$:

$$f^{(\nu)}(x_j) = y_{j\nu} \qquad \text{при} \quad 0 \le \nu \le m_j - 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

3.6.1. Утверждение. *При сумме кратностей $\sum m_j = N$ задача интерполяции допускает и притом единственное решение на пространстве многочленов степени меньшей N над произвольным полем характеристики нуль.*

Доказательство. Обозначим пространство многочленов степени меньшей N через P_N. Отображение из P_N в k^N, сопоставляющее произвольному многочлену его значения и значения его заданных производных в заданных точках (упорядоченные в столбец каким-либо фиксированным способом) является, очевидно, линейным оператором.

Этот оператор инъективен, поскольку лежащий в ядре многочлен должен иметь точки x_j своими корнями кратности, не меньшей, чем m_j, что невозможно для ненулевого многочлена строго меньшей, чем сумма кратностей, степени.

Поскольку размерности P_N и k^N равны, наше отображение — изоморфизм, что и требовалось доказать. □

Практическое определение интерполяционного многочлена в конкретных задачах, как правило, удобнее всего производить методом неопределённых коэффициентов. Однако можно писать и некоторые общие формулы. Выберем в P_N базис из многочленов $g_{j\nu}$, двойственный к базису в P_N^*, состоящему из ковекторов, которые сопоставляют многочлену f значения $f^{(\nu)}(x_j)$. Тогда решение задачи интерполяции будет задаваться формулой:

$$f = \sum_{j,\nu} y_{j\nu} g_{j\nu}.$$

Многочлены $g_{j\nu}$ определяются тем, что

$$g_{j\nu}^{(\mu)}(x_k) = \begin{cases} 1 & , \text{при } k = j\,,\ \nu = \mu \\ 0 & , \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Например, если все узлы простые, т.е. все кратности $m_j = 1$ (а $k = N$), многочлен g_j должен иметь значение 1 в точке x_j, и обращаться в нуль в остальных $N-1$ точках x_ν. Тем самым

$$g_j = \prod_{\nu \ne j} \frac{(x - x_\nu)}{(x_j - x_\nu)},$$

так что для многочлена, принимающего в заданных точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$ заданные значения $y_1, y_2, \ldots, y_N$, мы получаем известную *интерполяционную формулу Лагранжа*:

$$f = \sum_{j=1}^{N} y_j \prod_{\nu \neq j} \frac{(x - x_\nu)}{(x_j - x_\nu)}.$$

Задача 1.21. Рассмотрите другой крайний случай, когда имеется один узел x_0 кратности N. Что за формула получится в этом случае?
Ответ: Формула Тейлора.