Домашний письменный экзамен
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
за I курс

Лектор: А. Городенцев. Преподавтель: В. Долотин

Письменный домашний экзамен является официальным способом получить отметку по курсу линейной алгебры за второй семестр. В экзамене могут принять участие все желающие. Для этого необходимо в воскресенье 1 июня 1997 года в $10^{\underline{00}}$ *лично прийти* в в МК НМУ, имея при себе *письменное решение* задач из предлагаемого ниже списка. Экзамен будет состоять в беседе с экзаменатором, цель которой – проверка Вашей письменной работы.

Полное решение каждой задачи[1] без «звёздочки» оценивается в 10 баллов, а каждой задачи со «звёздочкой» — в 15 баллов. Для получения оценки «отлично» достаточно набрать не менее 75 баллов, для получения оценки «хорошо» — не менее 50 баллов, для получения оценки «удовлетворительно» — не менее 25 баллов.

Наличие зачёта по алгебре не является обязательным для участия в экзамене, но является необходимым для получения отметки в зачётку. Те студенты, которые сдали зачёт по линейной алгебре на мех-мате и сдали экзамен по алгебре на мех-мате с оценкой «хорошо» или «отлично» получают зачёт по алгебре автоматически. Прочие желающие получить зачёт должны обратится к преподавателям алгебры и получить от них *конкретное индивидуальное задание*, выполнения которго достаточно для получения зачёта.

Задача 1. («краски») Имеются семь одинаковых банок, каждая из которх на $\frac{9}{10}$ заполнена краской одного из семи цветов радуги (в каждой банке – свой цвет и все цвета разные). Можно ли переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое) получить хотя бы в одной из банок колер, в котором все семь красок смешаны в равной пропорции?

Задача 2. («α-нормы») При каких вещественных α функция $(|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha)^{1/\alpha}$ является нормой на $\mathbb{R}^n$?

Задача 3. («единичная сфера») Является ли функция $|x_1| + |x_2| + |x_3|$ нормой на $\mathbb{R}^3$, и если да, то что представляет собой единичная сфера в метрике, индуцированной этой нормой на аффинной плоскости, проходящей через концы базисных векторов в $\mathbb{R}^3$?

Задача 4. («объём») Пусть линейный оператор A вкладывает n-мерное евклидово пространство V в m-мерное евклидово пространство W (разумеется, $n \le m$). Напишите формулу, позволяющую вычислить n-мерный объём параллелепипеда, натянутого на систему векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, порождающих пространство V, как только известны координаты их образов $w_i = Av_i \in W$ и матрица A в каких-либо ортонормированных базисах.

Задача 5. («Spin(3)») Рассмотрим единичную сферу $S^3 \subset \mathbb{H}$, образованную кватернионами с нормой 1. Она является группой относительно кватернионного умножения и действует на $\mathbb{H}$ посредством сопряжения: $q: \ x \longmapsto qxq^{-1} \quad \forall\, q \in S^3, x \in \mathbb{H}$.

а) Путь кватернион $q \in S^3$ составляет угол ϑ с единичным кватернионом 1. Каковы собственные значения сопряжения при помощи q ?

б) Убедитесь, что предыдущее сопряжение сохраняет трёхмерное евклидово подпространство чисто мнимых кватернионов, и индуцирует на нём евклидову изомтрию. Какова её матрица в базисе $\{i, j, k\}$? Вокруг какой оси и на какой угол она поворачивает это пространство ?

[1] речь идёт именно о задачах, а не о пунктах задач

Задача 6. **(«квадрика Сегре»)** Пусть U и V суть два двумерных векторных пространства над полем k, а W — четырёхмерное пространство всех линейных операторов из U в V, и пусть $Q \subset \mathbb{P}(W)$ — множество всех ненулевых вырожденных линейных операторов, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

а) Проверьте, что Q — это квадрика в $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(W)$. Является ли она невырожденной ?

б) Из каких операторов состоит касательное пространство к Q в точке, которая отвечает вырожденным оператором с ядром, порождённым вектором $u \in U$ и образом, порождённым вектором $v \in V$?

в) Покажите, что квадрика Q не содержит плоскостей, но содержит два семейства прямых, таких что

– всякая прямая, лежащая на квадрике содержится в одном и только в одном семействе;

– через каждую точку Q проходит ровно одна прямая первого семейства и ровно одна прямая второго семейства;

– никакие две прямые из одного (как первого так и второго) семейства не пересекаются.

Задача 7. **(«сигнатура»)** Какова сигнатура квадратичной формы $\mathrm{tr}\,(A^2)$ на пространстве вещественных $n \times n$ - матриц?

Задача 8. **(«циркулянт»)** Нормален ли оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}^n$?

Задача 9. Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора $x\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial x}$ на пространстве многочленов степени $\le n$ от x и y (если общий случай вызывает затруднения, рассмотрите для начала $n = 2, 3$).

Задача 10. **(«ЖНФ»)** Найдите жорданову нормальную форму матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Задача 11*. **(«Лемма Барта»)** Пусть F и G — два эндоморфизма комплексного векторного пространства, и $[F, G] = FG - GF$ — их коммутатор. Покажите, что если $\mathrm{rk}\,[F, G] \le 1$, то у F и G есть общий собственный вектор.

Задача 12. **(«прямые в $\mathbb{R}^3$»)** В следующих двух задачах требуется провести полный геометрический анализ, т. е. перечислмть все возможные ответы и выяснить, какие из них устойчивы относительно «малых шевелений» исходных данных.

а) Опишите ГМТ, заметаемое всевозможными прямыми, пересекающими каждую из трёх заданных попарно скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}^3$

б) Сколько прямых пересекает каждую из четырёх заданных попарно скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}^3$?

Задача 13. На $2n$-мерном вещественном векторном пространстве V рассматриваются три объекта: невырожденная положительно определённая симметричная билинейная форма

g, невырожденная кососимметричная билинейная форма ω и линейный оператор I с квадратом -1. Покажите, что следующие условия равносильны:

а) V является овеществлением n-мерного комплексного эрмитова пространства, в котором умножение на i задаётся (с $\mathbb{R}$-линейной точки зрения) оператором I, а эрмитова форма имеет вид $h = g + i\omega$;

б) I является изометрическим относительно формы g (а форма ω удовлетворяющая пункту (а) однозначно восстанавливается по ним);

в) I является изометрическим относительно ω формы (а форма g удовлетворяющая пункту (а) однозначно восстанавливается по ним);