

Конечно порождённые абелевы группы

- АС7♦1.** Напишите жорданово и фробениусово разложения всех абелевых групп порядков
а) 4 б) 6 в) 8 г) 12 д) 16 е) 24 ж) 36 з) 48.
- АС7♦2.** Изоморфны ли абелевы группы $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(36)$ и $\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(18)$?
- АС7♦3.** Напишите жорданово и фробениусово разложения аддитивных абелевых групп
а) $\mathbb{Z}/(6)$, $\mathbb{Z}/(12)$, $\mathbb{Z}/(24)$ и $\mathbb{Z}/(60)$ б) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(15), \mathbb{Z}/(48))$ и $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(81), \mathbb{Z}/(9))$
в) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(16), \mathbb{Z}/(24))$ г) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(15), \mathbb{Z}/(20) \oplus \mathbb{Z}/(12))$
- АС7♦4.** Обозначим через $g(A)$ минимальное количество элементов, которыми порождается абелева группа A . Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка
а) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^4 \cdot 17^2$ б) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17^3$,
укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.
- АС7♦5.** Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?
- АС7♦6.** Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$ подгруппа, изоморфная
а) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$ б) $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$ в) $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?
- АС7♦7.** Сколько в $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(30) \oplus \mathbb{Z}/(120) \oplus \mathbb{Z}/(240)$ подгрупп, изоморфных
а) $\mathbb{Z}/(5)$ б) $\mathbb{Z}/(25)$ в) $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$?
- АС7♦8.** Опишите фактор группы $\mathbb{Z}/(9) \oplus \mathbb{Z}/(27)$ по подгруппе, порождённой элементами:
а) $([3]_9, [9]_{27})$ б) $([3]_9, [6]_{27})$ в) $([6]_9, [3]_{27})$.
- АС7♦9.** Напишите жорданово и фробениусово разложения фактора решётки \mathbb{Z}^3 по подрешётке, порождённой векторами:
а) $(7, 2, 3)$, $(21, 8, 9)$, $(5, -4, 3)$ б) $(2, -4, 6)$, $(6, -6, 10)$, $(2, 5, 8)$, $(6, 0, 5)$
в) $(4, 5, 3)$, $(5, 6, 5)$, $(8, 7, 9)$ г) $(-81, -6, -33)$, $(60, 6, 24)$, $(-3, 6, -3)$, $(18, 6, 6)$
д) $(-62, -8, -26)$, $(40, 10, 16)$, $(22, -8, 10)$, $(20, 2, 8)$.
- АС7♦10.** Напишите жорданово и фробениусово разложения фактора решётки \mathbb{Z}^4 по подрешётке, порождённой столбцами матрицы
а) $\begin{pmatrix} -2 & 87 & -86 \\ 41 & -51 & 69 \\ 32 & -69 & 81 \\ 24 & -71 & 80 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -45 & -72 & 19 & 14 \\ 1 & 16 & 15 & 4 \\ 9 & 18 & 3 & 0 \\ 8 & 26 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -31 & -52 & -47 & 13 & 11 \\ -7 & -4 & -5 & 1 & 1 \\ -62 & 66 & 24 & -6 & -10 \\ -100 & 10 & -28 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.
- АС7♦11.** Напишите жорданово и фробениусово разложения фактора решётки \mathbb{Z}^3 по подрешётке, задаваемой уравнениями:
а) $\begin{cases} 686x_1 - 240x_2 + 122x_3 = 0 \\ 65x_1 - 24x_2 + 11x_3 = 0 \\ -159x_1 + 54x_2 - 29x_3 = 0 \\ -17x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -143x_1 - 40x_2 + 36x_3 = 0 \\ -24x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ 48x_1 + 15x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$
в) $\begin{cases} 140x_1 - 175x_2 + 42x_3 = 0 \\ 43x_1 - 54x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$
- АС7♦12.** В абелевой группе, порождённой элементами a_1, a_2, a_3 , найдите порядок элемента
а) $a_1 + 2a_3$, если¹ $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$
б) $32a_1 + 31a_3$, если $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$.

¹Здесь и далее мы по умолчанию считаем, что все \mathbb{Z} -линейные соотношения между образующими a_i вытекают из написанных.