

## Конечно порождённые абелевы группы

**AC7◦1.** Напишите жорданово и фробениусово разложения всех абелевых групп порядков

а) 4 б) 6 в) 8 г) 12 д) 16 е) 24 ж) 36 з) 48.

**AC7◦2.** Изоморфны ли абелевы группы  $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(36)$  и  $\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(18)$ ?

**AC7◦3.** Напишите жорданово и фробениусово разложения аддитивных абелевых групп

а)  $\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(24)$  и  $\mathbb{Z}/(60)$  б)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(15), \mathbb{Z}/(48))$  и  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(81), \mathbb{Z}/(9))$   
в)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(16), \mathbb{Z}/(24))$  г)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(15), \mathbb{Z}/(20) \oplus \mathbb{Z}/(12))$

**AC7◦4.** Обозначим через  $g(A)$  минимальное количество элементов, которыми порождается

абелева группа  $A$ . Найдите  $\max g(A)$  по всем абелевым группам  $A$  порядка

а)  $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^4 \cdot 17^2$  б)  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17^3$ ,

укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.

**AC7◦5.** Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

**AC7◦6.** Есть ли в абелевой группе  $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(16)$  подгруппа, изоморфная

а)  $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(8)$  б)  $\mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$  в)  $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$ ?

**AC7◦7.** Сколько в  $\mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(30) \oplus \mathbb{Z}/(120) \oplus \mathbb{Z}/(240)$  подгрупп, изоморфных

а)  $\mathbb{Z}/(5)$  б)  $\mathbb{Z}/(25)$  в)  $\mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(5)$ ?

**AC7◦8.** Опишите фактор группы  $\mathbb{Z}/(9) \oplus \mathbb{Z}/(27)$  по подгруппе, порождённой элементами:

а)  $([3]_9, [9]_{27})$  б)  $([3]_9, [6]_{27})$  в)  $([6]_9, [3]_{27})$ .

**AC7◦9.** Напишите жорданово и фробениусово разложения фактора решётки  $\mathbb{Z}^3$  по подрешётке, порождённой векторами:

а)  $(7, 2, 3), (21, 8, 9), (5, -4, 3)$  б)  $(2, -4, 6), (6, -6, 10), (2, 5, 8), (6, 0, 5)$   
в)  $(4, 5, 3), (5, 6, 5), (8, 7, 9)$  г)  $(-81, -6, -33), (60, 6, 24), (-3, 6, -3), (18, 6, 6)$   
д)  $(-62, -8, -26), (40, 10, 16), (22, -8, 10), (20, 2, 8)$ .

**AC7◦10.** Напишите жорданово и фробениусово разложения фактора решётки  $\mathbb{Z}^4$  по подрешётке, порождённой столбцами матрицы

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -2 & 87 & -86 \\ 41 & -51 & 69 \\ 32 & -69 & 81 \\ 24 & -71 & 80 \end{pmatrix} \text{ б)} \begin{pmatrix} -45 & -72 & 19 & 14 \\ 1 & 16 & 15 & 4 \\ 9 & 18 & 3 & 0 \\ 8 & 26 & 8 & 0 \end{pmatrix} \text{ в)} \begin{pmatrix} -31 & -52 & -47 & 13 & 11 \\ -7 & -4 & -5 & 1 & 1 \\ -62 & 66 & 24 & -6 & -10 \\ -100 & 10 & -28 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

**AC7◦11.** Напишите жорданово и фробениусово разложения фактора решётки  $\mathbb{Z}^3$  по подрешётке, задаваемой уравнениями:

$$\text{а)} \begin{cases} 686x_1 - 240x_2 + 122x_3 = 0 \\ 65x_1 - 24x_2 + 11x_3 = 0 \\ -159x_1 + 54x_2 - 29x_3 = 0 \\ -17x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \text{ б)} \begin{cases} -143x_1 - 40x_2 + 36x_3 = 0 \\ -24x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ 48x_1 + 15x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 140x_1 - 175x_2 + 42x_3 = 0 \\ 43x_1 - 54x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$$

**AC7◦12.** В абелевой группе, порождённой элементами  $a_1, a_2, a_3$ , найдите порядок элемента

а)  $a_1 + 2a_3$ , если <sup>1</sup>  $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$

б)  $32a_1 + 31a_3$ , если  $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$ .

<sup>1</sup>Здесь и далее мы по умолчанию считаем, что все  $\mathbb{Z}$ -линейные соотношения между образующими  $a_i$  вытекают из написанных.