

Кватернионы

АС17♦1. Решите следующие системы линейных уравнений на неизвестные $x, y \in \mathbb{H}$:

$$\text{а) } \begin{cases} \mathbf{k} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot x + (1 + \mathbf{k}) \cdot y \\ \mathbf{i} = (1 + \mathbf{i}) \cdot x + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \mathbf{k} = (1 + \mathbf{i}) \cdot x + \mathbf{j} \cdot y \\ \mathbf{i} = (1 + \mathbf{j}) \cdot x + \mathbf{k} \cdot y \end{cases}$$

АС17♦2. Какой бывает размерность подпространства $C_q = \{h \in \mathbb{H} \mid qh = hq\}$ для данного $q \in \mathbb{H}$? Для каждого из возможных значений $\dim C_q$ опишите все $q \in \mathbb{H}$, на которых оно достигается. В частности, найдите центр тела кватернионов.

АС17♦3. Покажите, что для любого $q \in \mathbb{H}$ с $q^2 = -1$ множество кватернионов вида $\alpha + q\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ является подполем, изоморфным \mathbb{C} .

АС17♦4. Покажите, что $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbf{j}\mathbb{C} = \{z_1 + \mathbf{j}z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \mathbf{j}^2 = -1 \in \mathbb{C} \ \& \ \forall z \in \mathbb{C} \ z\mathbf{j} = \mathbf{j}\bar{z}\}$.

АС17♦5. Верно ли, что любой не вещественный кватернион является корнем квадратного уравнения с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом?

АС17♦6 (чисто мнимые кватернионы). Пусть $\mathbb{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\}$. Покажите, что а) $\mathbb{I} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ б) $\{q \in \mathbb{H} \mid q^2 = -1\}$ — это единичная сфера в \mathbb{I} в) форма $(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} (pq^* + qp^*)/2$ задаёт на \mathbb{I} евклидово скалярное произведение г) \mathbb{I} замкнуто относительно коммутаторной скобки $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} xy - yx$ д) $[x, y]$ ортогонален x, y , а $\|[x, y]\|$ равна абсолютной величине площади параллелограмма, натянутого на x, y е) у всех ортонормальных базисов в \mathbb{I} , ориентированных как $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, одинаковые таблицы умножения ж) для любого ненулевого $h \in \mathbb{H}$ сопряжение $\text{Ad}_h : q \mapsto hqh^{-1}$ корректно задаёт ортогональный оператор $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$.

АС17♦7. Для отличного от 1 кватерниона $h \in \text{SU}_2$ зафиксируем в \mathbb{R} -линейной оболочке кватернионов 1 и h один из двух перпендикулярных 1 векторов \mathbf{m} единичной длины и зададим $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой $h = \cos \alpha + \mathbf{m} \sin \alpha$. Покажите, что $\text{Ad}_h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ — это поворот по часовой стрелке на угол 2α вокруг оси, направленной вдоль \mathbf{m} .

АС17♦8. Для данной 2×2 матрицы $h \in \text{SU}_2$ явно вычислите 3×3 матрицу $F_h \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ оператор Ad_h .

АС17♦9. Для любого $q \in \text{SU}_2$ покажите, что отображение $\sigma_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto -qh^*q$, является отражением в гиперплоскости q^\perp .

АС17♦10. Для любых $p, q \in \text{SU}_2$ положим $\varphi_{pq} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto phq^{-1}$. Докажите, что правило $(p, q) \mapsto \varphi_{p,q}$ задаёт эпиморфизм групп $\text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \twoheadrightarrow \text{SO}_4(\mathbb{R})$ и найдите его ядро.

АС17♦11. Для данных 2×2 матриц $p, q \in \text{SU}_2$ явно вычислите 4×4 матрицу $\Phi_{pq} \in \text{SO}_4(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ оператор $\varphi_{p,q}$.

АС17♦12 (октаплекс, или бинарная группа тетраэдра). Покажите, что а) \mathbb{Z} -линейная оболочка восьми кватернионов $\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$ и шестнадцати кватернионов $(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})/2$ является подкольцом в \mathbb{H} б) эти 24 кватерниона составляют мультипликативную группу \mathfrak{T} его обратимых элементов в) гомоморфизм $\text{Ad} : \text{SU}_2 \twoheadrightarrow \text{SO}_3, h \mapsto \text{Ad}_h$, переводит \mathfrak{T} в собственную группу правильного тетраэдра (явно укажите вершины этого тетраэдра) г) предъявите изоморфизмы $\mathfrak{T} \simeq \text{SL}_2(\mathbb{F}_3), T \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$, переводящие $\text{Ad} : \mathfrak{T} \twoheadrightarrow T$ в факторизацию по центру $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3) \twoheadrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ д*) кватернионы из группы \mathfrak{T} являются вершинами правильного самодвойственного четырёхмерного многогранника с символом Шлефли $(3, 4, 3)$: опишите звезду вершины 1 и примыкающие к 1 грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах.

АС17♦13. Для каждого $z \in \mathbb{F}_9$ положим $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} F_3(z) = z^3$. Не встречали ли Вы раньше группу

$$\text{SU}_2(\mathbb{F}_9) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \text{Mat}_2(\mathbb{F}_9) \mid \bar{X}X^t = E\} ?$$