

Комплексное vs вещественное

АС15♦1. Рассмотрим комплексное векторное пространство W и обозначим через $W_{\mathbb{R}}$ его о веществление. Найдите вещественную коразмерность $\text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в $\text{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$.

АС15♦2. Обозначим через $\sigma, \tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ отражение и поворот, порождающие диэдральную группу D_n , а через $\sigma_{\mathbb{C}}, \tau_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — их комплексификации. Как действует $\sigma_{\mathbb{C}}$ на собственные векторы поворота?

АС15♦3. Существует ли унитарный оператор $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, переводящий неупорядоченную пару одномерных комплексных подпространств, порождённых вектором $(-3, 2 + i)$ и вектором $(-3 + i, 2i)$, в неупорядоченную пару подпространств, порождённых векторами
 а) $(-26 + 11i, 9 + 16i)$ и $(-20 + 18i, -11 + 17i)$ б) $(-8 - i, -5 + 2i)$ и $(-6, -9 + 7i)$?

АС15♦4. Приведите пример линейного оператора на эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогонал к которому не инвариантен.

АС15♦5. Покажите, что для каждого линейного отображения $f : U \rightarrow W$ эрмитовых пространств существует единственный такой оператор $f^{\times} : W \rightarrow U$, что $(fu, w) = (u, f^{\times}w)$ для всех $u \in U$ и $w \in W$, выразите матрицу $F^{\times}$ оператора $f^{\times}$ в произвольных базисах пространств U, W через матрицу F оператора f и матрицы Грама этих базисов и докажите, что
 а) $(fg)^{\times} = g^{\times}f^{\times}$ б) $f^{\times \times} = f$ в) $(\ker f)^{\perp} = \text{im } f^{\times}$ г) $(\text{im } F)^{\perp} = \ker f^{\times}$ д) $(zf)^{\times} = \bar{z}f^{\times} \forall z \in \mathbb{C}$.

АС15♦6. Пусть эрмитово пространство V распадается в (не обязательно ортогональную) прямую сумму $V = U \oplus W$ и оператор $F : V \rightarrow V$ проектирует V на W вдоль U . Покажите, что $V = U^{\perp} \oplus W^{\perp}$ и опишите действие оператора $F^{\times}$.

АС15♦7. Пусть F — произвольный линейный эндоморфизм эрмитова пространства W . Докажите, что
 а) если подпространство $U \subset W$ F -инвариантно, то $U^{\perp}$ $F^{\times}$ -инвариантно
 б) если вектор $w \in W$ собственный и для F , и для $F^{\times}$, то собственные числа сопряжены
 в) если F обратим, то $F^{-1 \times} = F^{\times -1}$.

АС15♦8. Рассмотрим пространство W бесконечно гладких функций $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, зануляющихся в точках 0, 1 вместе со всеми своими производными.

а) Покажите, что форма $(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx$ задаёт на нём эрмитову структуру.
 б) Вычислите сопряжённый к оператору $f \mapsto a_0 f + a_1 f'(x) + a_2 f''(x)$, где $a_0, a_1, a_2 \in W$ — заданные функции.

в) Самосопряжён ли оператор $x^2(x-1)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1) \frac{d}{dx}$?

АС15♦9. Выясните, нормален ли оператор $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ с матрицей

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{2}{9} + \frac{11i}{9} & \frac{8i}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} + \frac{7i}{9} \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} - \frac{13i}{9} & \frac{14}{9} + \frac{2i}{9} \\ \frac{10}{9} - \frac{10i}{9} & -\frac{1}{3} - \frac{14i}{9} \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - \frac{11i}{9} & \frac{1}{3} - \frac{4i}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} - \frac{7i}{9} \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе, и если да, приведите его к нормальным осям.

АС15♦10. Покажите, что для самосопряжённых операторов f, g на эрмитовом пространстве W равенство $(fw, w) = (gw, w)$ для всех $w \in W$ равносильно равенству $f = g$.

АС15♦11. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ приведите к нормальным осям грассмановы квадратичные формы:

$$\text{а) } -\frac{8}{15}x_1 \wedge x_2 - \frac{8}{3}x_1 \wedge x_3 + \frac{94}{15}x_1 \wedge x_4 + \frac{56}{15}x_2 \wedge x_3 - \frac{8}{3}x_2 \wedge x_4 + \frac{8}{15}x_3 \wedge x_4 \\ \text{б) } -\frac{52}{27}x_1 \wedge x_2 - \frac{112}{27}x_1 \wedge x_3 - \frac{76}{27}x_1 \wedge x_4 - \frac{104}{27}x_2 \wedge x_3 + \frac{68}{27}x_2 \wedge x_4 - \frac{38}{27}x_3 \wedge x_4.$$

АС15♦12. Найдите полярные разложения $f = g_1 h_1$ и $f = h_2 g_2$, где h_1, h_2 самосопряжены и положительны, а $g_1, g_2 \in U_2$, для оператора $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -46/27 - 8i/9 & 20/27 - 38i/27 \\ -40/27 - 37i/27 & -44/27 + 2i/9 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -10/9 + 8i/9 & -22/9 - 2i/3 \\ 2 - 4i/9 & -5/9 - 2i/9 \end{pmatrix}.$$