

Тензорная алгебра

Обозначения. Всюду в этом листке $e_1, \dots, e_d$ и $x_1, \dots, x_d$ по умолчанию означают двойственные базисы векторных пространств V и V^* над произвольным полем $\mathbb{k}$. Через $\text{Sym}^n V$, $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ обозначаются подпространства симметричных и знакопеременных тензоров, а через $S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$ — обычные и грассмановы однородные многочлены степени n от $e_1, \dots, e_d$ (факторы пространства $V^{\otimes n}$ по соотношениям $\mathcal{J}_{\text{com}}$ и $\mathcal{J}_{\text{sk}}$ коммутирования и антикоммутирования).

АС14♦1. Постройте изоморфизмы пространства n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ с пространствами **а)** $V^{\otimes n}$ **б)** $V^{*\otimes n}$. Который из них остаётся изоморфизмом в бесконечномерии?

АС14♦2. Напишите матрицы Грама билинейных форм **а)** $(x_1 + x_2) \otimes (x_1 - x_2)$ **б)** $(x_1 + x_2)^{\otimes 2}$ **в)** $(x_1 + 2x_2) \otimes (x_1 + x_2) - (x_1 + x_2) \otimes (x_1 + 2x_2)$ **г)** $(x_1 + 2x_2) \otimes (x_3 + x_4) + (x_1 - 2x_2) \otimes (x_3 - x_4)$.

АС14♦3. Пусть $d = \dim V = 3$, $\det : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ — определитель матрицы координат тройки векторов в базисе e_1, e_2, e_3 , а $\varphi = x_1 \otimes x_2 + x_3^{\otimes 2}$. Вычислите $\psi(e_1, e_2, e_3, e_3)$ для

а) $\psi = \varphi \otimes \det$ **б)** $\psi = \det \otimes \varphi$.

АС14♦4. Разложимы ли тензоры **а)** $\sum_i e_i^{\otimes 2}$ **б)** $\sum_i e_i^{\otimes 3}$ **в)** $\sum_{ij} e_i^{\otimes 2} \otimes e_j$ **г)** $\sum_{ij} ij e_i \otimes e_j$ **д)** $\sum_{ij} (i + j) e_i \otimes e_j$ **е)** $\sum_{ijk} 2^{i+j+k^2} e_i \otimes e_j \otimes e_k$?

АС14♦5. Для конечномерного векторного пространства V над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** симметричных n -линейных форм $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ **б)** функций $f : V \rightarrow \mathbb{k}$, задаваемых однородными многочленами степени n от $x_1, \dots, x_d$ **в)** $\text{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\text{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^n V)^*$ **е)** $S^n(V^*)$. В какие базисы пространств (а-д) они переводят базис пространства (е) из мономов $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$?

АС14♦6. В условиях **зад. АС14♦5** постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** знакопеременных n -линейных форм $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ **б)** $\text{Alt}^n(V^*)$ **в)** $\text{Alt}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^n V)^*$ **д)** $\Lambda^n(V^*)$. Куда переходит базис пространства (д) из мономов $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m}$?

АС14♦7. Какие из построенных в двух предыдущих задачах изоморфизмов остаются такими **а)** над полями конечной характеристики **б)** в бесконечномерии?

АС14♦8. Пусть $\dim V = d$. Найдите $\dim \text{Sym}^n V = \dim S^n V$ и $\dim \text{Alt}^n V = \dim \Lambda^n V$.

АС14♦9. Пусть $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Докажите, что **а)** $V \otimes V \simeq \text{Sym}^2 V \oplus \text{Alt}^2 V$ **б)** сумма $\text{Sym}^n V \oplus \text{Alt}^n V$ прямая при всех n . Верно ли это, когда $\text{char } \mathbb{k} = 2$?

АС14♦10. Предъявите $t \in V^{\otimes 3} \setminus (\text{Sym}^3 V \oplus \text{Alt}^3 V)$.

АС14♦11 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространства $\text{Sym}^n V^*$ и $S^n(V^*)$ линейно порождаются, соответственно, тензорами $\varphi^{\otimes n} = \varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ и многочленами φ^n , где $\varphi \in V^*$, и явно выразите через $\varphi^{\otimes n}$ тензоры

а) $x_{[2,1]} = x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_1 \otimes x_1$

б) $x_{[3,1]} = x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1$.

АС14♦12. Вычислите

а) $\text{sym}_{|n|+|k|}(x_{[n_1, \dots, n_d]} \otimes x_{[k_1, \dots, k_d]})$ **б)** $\text{alt}_{n+k}(\text{alt}_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) \otimes \text{alt}_k(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}))$.

АС14♦13. Верно ли, что **а)** $S^2 S^2 V \simeq S^4 V$ **б)** $\text{sym}_4(\text{Sym}^2 V \otimes \text{Sym}^2 V) = \text{Sym}^4 V$ **в)** $\Lambda^2 \Lambda^2 V \simeq \Lambda^4 V$ **г)** $\text{alt}_4(\text{Alt}^2 V \otimes \text{Alt}^2 V) = \text{Alt}^4 V$?

АС14♦14. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен $9x^3 - 15yx^2 - 6zx^2 + 9xy^2 + 18z^2x - 2y^3 + 3zy^2 - 15z^2y + 7z^3$ в многочлен от ≤ 2 переменных? Если да, предъявите такую замену явно.

АС14♦15. Выясните, разложима ли в произведение трёх линейных форм от $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ грассманова кубическая форма $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$, и если да, выпишите такое разложение явно.