

Тензорные произведения

АС13♦1. Покажите, что $K \otimes_K M \simeq M$ для всех модулей M над любым коммутативным кольцом K .

АС13♦2. Пусть $f_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto mz$, и $g_k : \mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(n), [z] \mapsto [kz]$. Канонический изоморфизм $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(n), x \otimes [y]_n \mapsto [xy]_n$, превращает каждый гомоморфизм $\mathbb{Z}$ -модулей

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$$

в гомоморфизм $\mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(n)$. В какие гомоморфизмы $\mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(n)$ превратятся $f_m \otimes_{\mathbb{Z}} g_k$ при разных $m, k \in \mathbb{N}$? Опишите их ядра и образы, а также ядра и образы самих f_m и g_k .

АС13♦3. Для любых модулей над произвольным коммутативным кольцом K постройте канонические изоморфизмы

а) $(M \oplus N) \otimes L \simeq (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)$ б) $\text{Hom}(M \oplus N, L) \simeq \text{Hom}(M, L) \oplus \text{Hom}(N, L)$

в) $\text{Hom}(L, M \oplus N) \simeq \text{Hom}(L, M) \oplus \text{Hom}(L, N)$ г) $\text{Hom}(L \otimes M, N) \simeq \text{Hom}(L, \text{Hom}(M, N))$.

АС13♦4. Вычислите $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(18), \mathbb{Z}/(12))$ и $\mathbb{Z}/(12) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(18)$.

АС13♦5. Докажите, что а) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$ б) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ в) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

г) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ д) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ е) $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(\text{НОД}(m, n))$

ж) $(K/I) \otimes_K (K/J) \simeq K/(I+J)$ для всех идеалов I, J любого коммутативного кольца K .

Всюду далее речь идёт про конечномерные векторные пространства над произвольным полем $\mathbb{k}$.

АС13♦6. Докажите, что среди векторов $v_1, \dots, v_n$, лежащих соответственно в пространствах $V_1, \dots, V_n$, тогда и только тогда есть нулевой вектор, когда все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ во все пространства W зануляются на наборе аргументов $(v_1, \dots, v_n)$.

АС13♦7. Пользуясь каноническим изоморфизмом $W \otimes U^* \simeq \text{Hom}(U, W)$, запишем операторы $g : U \rightarrow V$ и $f : V \rightarrow W$ в виде $g = \sum_i v_i \otimes \varphi_i, f = \sum_j w_j \otimes \psi_j$ с $v_i \in V, \varphi_i \in U^*, w_j \in W, \psi_j \in V^*$. Запишите их композицию $fg \in \text{Hom}(U, W) \simeq W \otimes U^*$ в виде а) $\sum_j w_j \otimes \xi_j$ б) $\sum_i u_i \otimes \varphi_i$, явно вычислив $\xi_j \in U^*$ и $u_i \in W$.

АС13♦8. Рассмотрим двойственные друг другу базисы $e_1, \dots, e_n$ и $x_1, \dots, x_n$ в V и в V^* . В какой оператор $V \rightarrow V$ переходит при изоморфизме из **зад. АС13♦7** тензор Казимира $\sum x_i \otimes e_i$?

АС13♦9. Покажите, что линейное отображение $\tau : \text{End}(V) \simeq V \otimes V^* \rightarrow (V \otimes V^*)^* \simeq \text{End}(V)^*$, переводящее $v \otimes \xi$ в линейную форму $u \otimes \varphi \mapsto \xi(u) \cdot \varphi(v)$, корректно определено и задаёт на векторном пространстве $\text{End}(V)$ корреляцию¹. Какая билинейная форма на $\text{End}(V)$ ей отвечает²? Вырождена ли она? Симметрична ли? Какую квадратичную форму задаёт?

АС13♦10. Опишите цикловой тип тензорного квадрата $f^{\otimes 2} : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ нильпотентного оператора $f : V \rightarrow V$ циклового типа а) $\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} \dots \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}$ б) $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \dots \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ в) $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ г) $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$.

АС13♦11. Пусть операторы $f : U \rightarrow U$ и $g : W \rightarrow W$ диагонализуются с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_m$. Перечислите собственные числа оператора $f \otimes g$.

АС13♦12. Докажите для линейных отображений $f_1 : U_1 \rightarrow W_1$ и $f_2 : U_2 \rightarrow W_2$ равенства

а) $\text{im } f_1 \otimes f_2 = \text{im } f_1 \otimes \text{im } f_2$ б) $\ker f_1 \otimes f_2 = \ker f_1 \otimes U_2 + U_1 \otimes \ker f_2$.

¹Напомним, что корреляцией (или, на физической фене, спуском индексов) называется линейное отображение $\beta : V \rightarrow V^*$. Пространство корреляций изоморфно пространству билинейных форм $b : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$. Изоморфизм переводит корреляцию β в форму $b(u, w) = \langle u, \beta(w) \rangle$ (свёртка вектора $u \in V$ и ковектора $\beta(w) \in V^*$). Билинейная форма b называется вырожденной, если существует такой вектор $u \neq 0$, что $b(u, v) = 0$ для всех v , и называется симметричной, если $b(u, w) = b(w, u)$ для всех u, w . Каждая билинейная форма $b : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ задаёт квадратичную форму $q_b : V \rightarrow \mathbb{k}, q_b(v) = b(v, v)$.

²Явно вычислите эту форму в терминах матриц операторов.