

О строении групп

- AC12♦1. Напишите два разных композиционных ряда для группы: а) S_4 б) D_6 .
- AC12♦2. Разложите в полупрямое произведение собственных подгрупп группы
а) S_n б) обратимых верхнетреугольных матриц в) подобий евклидовой плоскости.
- AC12♦3. Есть ли такое разложение у группы Q_8 ?
- AC12♦4. Приведите пример неабелевой группы порядка а) 21 б) 27 и укажите какой-нибудь её композиционный ряд.
- AC12♦5. Покажите, что группа $\mathbb{Z}/(3) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/(4)$, где $\psi : \mathbb{Z}/(4) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/(3))$ переводит $[1]_4$ в автоморфизм смены знака, не абелева и не изоморфна ни D_6 , ни A_4 .
- AC12♦6. Для всякого ли простого $p \mid |G|$, в G есть элемент порядка¹ p ?
- AC12♦7. Верно ли, что силовская p -подгруппа группы G
а) нормальна если и только если $N_p(G) = 1$
б) пересекает каждую подгруппу $H \subset G$ по силовской p -подгруппе в H
в) отображается в силовскую p -подгруппу при каждой факторизации $G \rightarrow G/N$?
- AC12♦8. Для простых $p \in \mathbb{N}$ найдите $N_p(S_p)$.
- AC12♦9. Перечислите все силовские подгруппы в а) S_3 б) S_4 в) S_7 .
- AC12♦10. Пусть $|D_n| = 2^m k$, где k нечётно. Докажите, что $N_2(D_n) = k$.
- AC12♦11. Верно ли, что во всех группах порядка 12 есть нормальная подгруппа порядка 4?
- AC12♦12. Перечислите с точностью до изоморфизма все группы порядка:
а) 14 б) 15 в) 21 г) 45 д) 49 е) 2121.
- AC12♦13. Верно ли, что верхние унитреугольные матрицы составляют силовскую p -подгруппу в $GL_n(\mathbb{F}_p)$? Сколько всего силовских p -подгрупп в $GL_n(\mathbb{F}_p)$?
- AC12♦14. Опишите подгруппу, порождённую матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ в $SL_2(\mathbb{F}_3)$, и перечислите все силовские подгруппы в $SL_2(\mathbb{F}_3)$.
- AC12♦15. Рассмотрим подгруппу $G \subset SL_2(\mathbb{C})$, порождённую матрицами $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, где $i^2 = \omega^2 + \omega = -1$. Найдите $|G|$, разложите группу G в полупрямое произведение собственных подгрупп и задайте её образующими и соотношениями.
- AC12♦16. Опишите группы автоморфизмов групп: а) $\mathbb{Z}/(n)$ б) D_3 в) D_4 г) Q_8 д) A_5 . У каких из этих групп все автоморфизмы внутренние?

¹ $\tau = {}^d g \cdots {}^1 g$ оль, ${}_d g \in ({}^d g, \dots, {}^1 g)$ набор

ПОДСКАЗКА: рассмотрите действие группы $(d)/\mathbb{Z}$ циклическими перестановками элементов на множестве таких