

Тензорная, симметрическая и грассманова алгебры

АЛ11♦1. Пусть $v \in V$ и $\omega \in \Lambda^k V$. При каких k равенство $v \wedge \omega = 0$ равносильно существованию такого $\eta \in \Lambda^{k-1} V$, что $\omega = v \wedge \eta$?

АЛ11♦2. Верно ли, что **а)** $S^n(V_1 \oplus \dots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_k} S^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes S^{m_k} V_k$

б) $\Lambda^n(V_1 \oplus \dots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_k} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_k} V_k$

(суммирование идёт по всем $m_1, \dots, m_k$ с $m_1 + \dots + m_k = n$ и $0 \leq m_i \leq n$)?

АЛ11♦3*. Пусть набор векторов $w = (w_1, \dots, w_n)$ произволен, а $u = (u_1, \dots, u_n)$ линейно независим. Докажите, что $u_1 \wedge w_1 + \dots + u_n \wedge w_n = 0$ если и только если $w = uA$ для симметричной матрицы $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$.

АЛ11♦4. Для линейного оператора $F : V \rightarrow V$ выразите через коэффициенты характеристического многочлена $\chi_F(t)$ числа: **а)** $\text{tr } F^{\otimes 2}$ **б*)** $\text{tr } F^{\otimes 3}$ **в)** $\det F^{\otimes 2}$ **г*)** $\det F^{\otimes 3}$.

АЛ11♦5. Пусть линейный оператор $F : V \rightarrow V$ диагонализуем. Положим

$$S^k F : S^k V \rightarrow S^k V, \quad v_1 \dots v_k \mapsto F(v_1) \dots F(v_k),$$

$$\Lambda^k F : \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^k V, \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto F(v_1) \wedge \dots \wedge F(v_k).$$

Выразите собственные числа этих операторов через собственные числа F и докажите в $\mathbb{k}[[t]]$ равенства: **а)** $\det(E - tF)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \text{tr}(S^k F) t^k$ **б)** $\det(E + tF) = \sum_{k \geq 0} \text{tr}(\Lambda^k F) t^k$.

АЛ11♦6*. Верны ли равенства из **зад. АЛ11♦5** также и для недиагонализуемых F ?

АЛ11♦7. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = 0$ и $\text{tr } \Lambda^k F = 0$ при всех $k \geq 1$. Верно ли, что F нильпотентен?

АЛ11♦8. Пусть $\dim V = d \geq 2$. Какие значения может принимать $\text{rk } \Lambda^{d-1} F$?

АЛ11♦9. Фиксируем ненулевой вектор $u \in V$. Оператор $\iota_u : V^{*\otimes n} \rightarrow V^{*\otimes n-1}$, двойственный¹ оператору $\lambda_u : V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^{\otimes n}$, $w \mapsto u \otimes w$, левого тензорного умножения на u , называется *внутренним умножением на u* . Явно опишите его действие на заданную n -линейную форму $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$, рассматриваемую как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Бывает ли ι_u не эпиморфен?

АЛ11♦10. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = 0$, так что $(S^n V)^* \simeq S^n(V^*)$ и $(\Lambda^n V)^* \simeq \Lambda^n(V^*)$. Фиксируем ненулевой вектор $u \in V$. Есть ли связь между оператором ∂_u дифференцирования многочленов в направлении вектора² u и операторами **а)** $S^n V^* \rightarrow S^{n-1} V^*$ **б)** $\Lambda^n V^* \rightarrow \Lambda^{n-1} V^*$, двойственными к операторам $S^{n-1} V \rightarrow S^n V$ и $\Lambda^{n-1} V \rightarrow \Lambda^n V$ левого умножения на u ?

АЛ11♦11 (комплексы Де Рама и Кошуля). Фиксируем в V^* базис $x_1, \dots, x_n$ и положим

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \sum x_i \otimes \partial / \partial x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{m-1} V^*, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_i x_i \wedge \omega \otimes \partial f / \partial x_i,$$

$$\partial \stackrel{\text{def}}{=} \sum \partial / \partial x_i \otimes x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{m+1} V^*, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_i \partial \omega / \partial x_i \otimes x_i f.$$

Покажите, что эти операторы **а*)** не зависят от выбора базиса **б)** удовлетворяют равенствам $d^2 = 0$, $\partial^2 = 0$, $d\partial + \partial d = (k+m) \text{Id}_{\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*}$. **в*)** Вычислите $\ker d / \text{im } d$ и $\ker \partial / \text{im } \partial$.

АЛ11♦12. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Докажите для любого $f \in S^n V^*$ и всех $u, w \in V$ равенства

$$\text{а)} \quad f(u+w) = \sum_k \partial_w^k f(u) / k! \quad \text{б)} \quad (n-k)! \partial_u^k f(w) = n! \tilde{f}(u^k, w^{n-k}) = k! \partial_w^{n-k} f(u)$$

$$\text{в)} \quad \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f / n!, \text{ где } \tilde{f} : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k} \text{ — полная поляризация многочлена } f.$$

АЛ11♦13*. Докажите, что $\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p=0}^n \text{tr}(\Lambda^p A \cdot \Lambda^p B^\vee) \alpha^p \beta^{n-p}$ для всех чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ и матриц $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, где $\Lambda^p A$ и $\Lambda^p B^\vee$ — квадратные матрицы размера $\binom{n}{p}$, клетки которых занумерованы возрастающими p -элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, и в IJ -той клетке у $\Lambda^p A$ находится IJ -тый $p \times p$ минор a_{IJ} матрицы A , а у $\Lambda^p B^\vee$ — алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} b_{JI}$ к $J I$ -му $p \times p$ минору матрицы B .

¹При каноническом отождествлении $V^{*\otimes n}$ с $V^{\otimes n}$ посредством полной свёртки.

²Напомним, что если $e_1, \dots, e_d \in V$ и $x_1, \dots, x_n \in V^*$ — двойственные базисы, а $u = a_1 e_1 + \dots + a_d e_d$, где $a_i \in \mathbb{k}$, то $\partial_u f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d a_i \partial f / \partial x_i$.