Тензорные произведения

АЛ10⋄1. Для конечномерных векторных пространств U, V, W постройте изоморфизмы:

а) $\mathrm{Hom}(U\otimes W,V)\simeq \mathrm{Hom}(W,\mathrm{Hom}(U,V))$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U,W),V)\simeq \mathrm{Hom}(W,U\otimes V)$

б) $\mathrm{Hom}\big(U\otimes \mathrm{Hom}(U,W)\,,\,W\big)\simeq \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U,W)\big)\simeq \mathrm{Hom}\big(U\,,\,\mathrm{Hom}(U,W)^*\otimes W\big)$

в) $\mathrm{End}(U\otimes V\otimes W)\simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U,V)\otimes \mathrm{Hom}(V,W),\mathrm{Hom}(U,W)\big)$.

АЛ10⋄2*. В какое линейное отображение $\mathrm{Hom}(U,V)\otimes \mathrm{Hom}(V,W)\to \mathrm{Hom}(U,W)$ переходит в зад. АЛ10⋄1 (в) тождественный эндоморфизм пространства $U\otimes V\otimes W$?

АЛ10⋄3*. Какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает в зад. АЛ10⋄1 (б) отображение $c:\ U\otimes \mathrm{Hom}(U,W)\to W$, $u\otimes\varphi\mapsto\varphi(u)$? Как устроено ядро соответствующего ему линейного отображения $U\to \mathrm{Hom}(U,W)^*\otimes W$?

АЛ10⋄4. Существуют ли на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ такие попарно различные ненулевые линейные операторы $F_1,\dots,F_m\in \mathrm{End}(V)$ и отличный от нулевого набор констант $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Bbbk^m$, что $\lambda_1F_1^{\otimes n}+\ldots+\lambda_mF_m^{\otimes n}=0$ при всех $n\in\mathbb{N}$?

АЛ10⋄5. Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi:\ V\times V\times V\to\Bbbk$ на n-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}\,\Bbbk>3$, что для всех $u,v,w\in V$

а) $\varphi(u,v,w)=\varphi(v,u,w)=\varphi(u,w,v)$ **б)** $\varphi(u,v,w)=\varphi(v,u,w)$

в) $\varphi(u,v,w)=\varphi(v,u,w)=\varphi(u,w,w)$ **г)** $\varphi(u,v,v)=\varphi(u,u,v)=0$ **д)** $\varphi(u,u,u)=0$

е*) $\varphi(u,v,w)=\varphi(v,w,u)$ **ж*)** $\varphi(u,v,w)+\varphi(v,w,u)+\varphi(w,u,v)=0$.

АЛ10⋄6. Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk\neq 2$, $U=\Bbbk^2$ и $V=\mathrm{End}(U)$. Покажите, что $\mathrm{Sym}^2V\simeq(\mathrm{Sym}^2U\otimes\mathrm{Sym}^2U^*)\oplus$ $\oplus\,(\mathrm{Alt}^2U\otimes\mathrm{Alt}^2U^*)$, $\mathrm{Alt}^2V\simeq(\mathrm{Sym}^2U\otimes\mathrm{Alt}^2U^*)\oplus(\mathrm{Alt}^2U\otimes\mathrm{Sym}^2U^*)$.

АЛ10⋄7. Пусть $\beta:\ V\times V\to\Bbbk$ — невырожденная симметричная билинейная форма. Покажите, что существует единственная билинейная форма $\Lambda^2\beta:\ \Lambda^2V\times\Lambda^2V\to\Bbbk$, значение которой на разложимых тензорах равно $\Lambda^2\beta(v_1\wedge v_2,w_1\wedge w_2)\overset{\text{def}}{=}\det\begin{pmatrix}\beta(v_1,w_1)&\beta(v_1,w_2)\\ \beta(v_2,w_1)&\beta(v_2,w_2)\end{pmatrix}$. Вырождена ли она? Симметрична ли?

АЛ10⋄8*. Пусть в зад. АЛ10⋄7 пространство $V=\mathrm{End}(U)$, как в зад. АЛ10⋄6, а билинейная форма β является поляризацией квадратичной формы $\det:\ \mathrm{End}(U)\to\Bbbk$. Фиксируем двойственные базисы $e_1,e_2\in U$, $x_1,x_2\in U^*$ и базис $v_{ij}=e_i\otimes x_j$ в V. Покажите, что **а)** формула $\omega\wedge\eta=\alpha(\omega,\eta)\,v_{11}\wedge v_{12}\wedge v_{21}\wedge v_{22}$ задаёт невырожденную симметричную билинейную форму $\alpha:\ \Lambda^2V\times\Lambda^2V\to\Bbbk$ **б)** для каждого $\omega\in\Lambda^2V$ существует единственное такое $\omega^*\in\Lambda^2V$, что $\alpha(\eta,\omega^*)=\Lambda^2\beta(\eta,\omega)$ для всех $\eta\in\Lambda^2V$ **в)** правило $\omega\mapsto\omega^*$ задаёт линейную инволюцию на пространстве Λ^2V. **г)** Напишите матрицу этой инволюции и матрицы Грама форм α и $\Lambda^2\beta$ в базисе $v_{ij}\wedge v_{k\ell}$. **д)** Зависят ли форма α и инволюция $*$ от выбора двойственных базисов в U и U^*? **е)** Вдохновляясь зад. АЛ10⋄6 установите канонические изоморфизмы между собственными подпространствами инволюции $*$ и пространствами S^2U и S^2U^*.

АЛ10⋄9*. В условиях зад. АЛ10⋄8 положим $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$, обозначим через P и Q квадрики, задаваемые квадратичными формами α и $\Lambda^2\beta$ в $\mathbb{P}_5$, а через $L_\pm\subset\mathbb{P}_5$ — двумерные плоскости, состоящие из неподвижных точек инволюции $*$. Покажите, что **а)** сопоставление прямой $(ab)\subset\mathbb{P}_3$ точки $a\wedge b\in\mathbb{P}_5$ задаёт биекцию между прямыми в $\mathbb{P}_3$ точками квадрики P **б)** два семейства прямых на квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$ перейдут при этом в две гладкие коники $P\cap L_\pm$ **в)** множество всех касательных прямых к квадрике Сегре перейдёт в линейное соединение этих двух коник, совпадающее с $P\cap Q$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 10 (15.4.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			
9а			
б			
в			