Строение групп

АЛ9⋄1. Докажите, что ядро действия группы G левыми умножениями на множестве смежных классов G/H произвольной подгруппы $H \subset G$ является единственной максимальной по включению среди содержащихся в H нормальных подгрупп $N \lhd G$.

АЛ9⋄2. Докажите, что при $n \geqslant 5$ индекс любой подгруппы $H \subsetneq A_n$ не меньше n.

АЛ9⋄3. Докажите, что неабелева простая группа, обладающая подгруппой индекса n, гомоморфно вкладывается в A_n.

АЛ9⋄4 (разрешимые группы). Докажите, что следующие свойства группы G эквивалентны:
а) существует цепочка подгрупп $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_{n-1} \rhd G_n = e$ с абелевыми G_i/G_{i+1}
б) последовательные коммутанты $G, G', G'', G''', \ldots$ тривиализуются на конечном шагу.

АЛ9⋄5. Пусть $N \lhd G$ и $H = G/N$. Верно ли, что если две из групп N, G, H разрешимы, то разрешима и третья?

АЛ9⋄6. Разрешимы ли при простых p, q, r все группы порядка **а)** pq **б)** pq^2 **в)** pqr?

АЛ9⋄7*. Докажите, что любая p-группа разрешима[1].

АЛ9⋄8*. Докажите, что все группы порядка < 60 разрешимы[2].

АЛ9⋄9*. Докажите, что неразрешимая группа порядка 60 изоморфна A_5[3].

АЛ9⋄10. Для группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ укажите **а)** все силовские подгруппы **б)** два разных композиционных ряда.

АЛ9⋄11. Верно ли, что в p-группе G есть нормальные подгруппы всех порядков, делящих $|G|$?

АЛ9⋄12. Перечислите с точностью до изоморфизма все группы порядка
а) 8 **б)** 12 **в)** $\leqslant 15$ **г*)** 105.

АЛ9⋄13* (системы Штейнера). Набор S из k-элементных подмножеств n-элементного множества X называется *системой Штейнера* $S(t,k,n)$, если каждое t-элементное подмножество в X содержится ровно в одном множестве из S. Например, множество аффинных прямых на координатной плоскости над полем $\mathbb{F}_5$ является системой $S(2,5,25)$.
а) По системе Штейнера $S(t,k,n)$ постройте систему $S(t-1,k-1,n-1)$.
б) Для всех $q = p^k$, где p — простое, постройте системы $S(2,q,q^2)$ и $S(2,q+1,q^2+q+1)$.
в) Покажите, что образы множества квадратов $\{0,1,4,9,3,5\}$ поля $\mathbb{F}_{11}$ под действием группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{11})$ дробно линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11}) = \{0,1,\ldots,10,\infty\}$ составляют систему Штейнера $S(5,6,12)$.
г) Постройте систему Штейнера $S(5,8,24)$.

АЛ9⋄14*. Для системы Штейнера $S = S(t,k,n)$ положим $\mathrm{Aut}\, S \overset{\text{def}}{=} \{g \in S_n \mid \forall\, Y \in S\ g(Y) \in S\}$. Постройте изоморфизмы:
а) $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_4)$ с $\mathrm{Aut}\, S(2,5,21)$ **б)** A_6 с коммутантом $\mathrm{Aut}'\, S(3,4,10)$.

АЛ9⋄15*. Найдите порядки *спорадических простых групп Матьё*[4]:
а) $M_{11} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(4,5,11)$ **б)** $M_{12} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(5,6,12)$ **в)** $M_{22} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(3,6,22)$
г) $M_{23} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(4,7,23)$ **д)** $M_{24} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}\, S(5,8,24)$.

АЛ9⋄16*. Покажите, что M_{11}, M_{22} и M_{23} суть стабилизаторы точек тавтологических действий M_{12}, M_{23} и M_{24} на соответствующих системах Штейнера.

---

1. подсказка: вложите её в S_n, а S_n — в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, и примените теорему Силова.
2. подсказка: $\exists\, p : N_p < 4$.
3. подсказка: рассмотрите её действие на силовских 5-подгруппах.
4. ответы: 7920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 9 (15.03.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
5			
6а			
б			
в			
7			
8			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
в			
г			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
15а			
б			
в			
г			
д			
16			