

Дополнительные задачи про определители и операторы

A7 $\frac{1}{2}$ ♦1 (соотношения Якоби). Пусть $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ — квадратная матрица над коммутативным кольцом K с единицей, и матрица $\Lambda^{n-1}A \in \text{Mat}_n(K)$ имеет в позиции (i, j) дополнительный к i -той строке и j -му столбцу минор порядка $n - 1$ в матрице A . Для всех I, J, k покажите, что (IJ) -тый $k \times k$ минор матрицы $\Lambda^{n-1}A$ равен $\det^{k-1}(A) \cdot (-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{IJ}}$, где $(-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{IJ}}$ — это алгебраическое дополнение к (IJ) -му минору матрицы A . Например, при $k = 2$ и $n = 3, 4$ для правого нижнего углового 2×2 -минора имеем:

$$\det \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

A7 $\frac{1}{2}$ ♦2 (конденсация Доджсона¹). Напишем элементы квадратной матрицы пореже и поставим в центр каждой 2×2 -подматрицы, образованной парами соседних строк и столбцов, определитель этой подматрицы. Например:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -5 & -1 & -5 & 1 \\ & 13 & -9 & -14 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ & 13 & 13 & 19 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \\ & -7 & 11 & 33 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Будем называть прореженные матричные элементы *основными*, а стоящие в перекрестьях между ними элементы — *насыщающими*. К полученной насыщенной матрице последовательно применяем такую процедуру: стираем внешний контур основных элементов (при этом бывшие насыщающие элементы становятся основными, а оставшиеся основные — насыщающими) и заменяем каждый насыщающий элемент образовавшейся матрицы меньшего размера на делённый на этот насыщающий элемент определитель окружающей его 2×2 -матрицы основных элементов. Например, для матрицы (1) получаем:

$$(1) \mapsto \begin{pmatrix} 13 & -9 & -14 \\ -143 & -11 & 19 \\ 13 & 78 & -44 \\ -7 & 11 & 33 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -143 & -11 \\ 78 & -44 \end{pmatrix} \mapsto 550 = \det A.$$

Докажите, что если посчастливится не делить на нуль, то в итоге получится матрица размера 1×1 , равная определителю исходной матрицы.

A7 $\frac{1}{2}$ ♦3 (детерминант Сильвестра). Пусть многочлены $A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $B(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$ имеют коэффициенты в произвольном поле \mathbb{k} ,

¹Вне математики более известного как Льюис Кэрролл.

причём $a_0 b_0 \neq 0$ и $n \geq m$. Обозначим через d_k определитель матрицы, которая получается выкидыванием по k строк и столбцов сверху, снизу, слева и справа из матрицы

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccccccc} a_0 & \cdots & \cdots & a_n & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & & b_0 & \cdots & b_m & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ b_0 & \cdots & b_m & & & & & \end{array} \right)}_{m+n} \left. \vphantom{\begin{array}{cccccccc} a_0 & \cdots & \cdots & a_n & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & & b_0 & \cdots & b_m & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ b_0 & \cdots & b_m & & & & & \end{array}} \right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array}$$

(в верхней и нижней части матрицы выписаны строки коэффициентов многочленов A и B , последовательно сдвигаемые на единицу вправо от строки к строке при движении сверху вниз и снизу вверх соответственно; все остальные элементы матрицы нулевые). Покажите, что индекс первого ненулевого члена последовательности d_0, d_1, d_2, \dots равен $\deg \text{НОД}(A, B)$.

A7½♦4. Опишите с точностью до изоморфизма² все пары (A, f) , где A — конечная аддитивная абелева группа, а $f \in \text{End } A$ имеет $f^2 = -\text{Id}_A$.

A7½♦5. Классифицируйте все конечно порождённые модули над кольцом $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$.

²Пары (A, f) и (B, g) изоморфны, если имеется такой изоморфизм абелевых групп $h : A \simeq B$, что $g = hfh^{-1}$.

Персональный табель _____ Листок № 7 $\frac{1}{2}$ (необязательный)
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			