

§15. Комплексные и вещественные векторные пространства

15.1. Овеществление комплексного пространства. Каждое векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ одновременно является векторным пространством и над подполем вещественных чисел $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Когда комплексное векторное пространство W рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$, оно обозначается $W_{\mathbb{R}}$ и называется *овеществлением* комплексного пространства W . Если множество векторов $E \subset W$ является базисом пространства W над $\mathbb{C}$, то множество $E \sqcup iE$, состоящее из векторов e и ie , где $e \in E$, является базисом пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, поскольку существование и единственность представления произвольного вектора $w \in W$ в виде комплексной линейной комбинации

$$w = \sum_e z_e e = \sum_e (x_e + iy_e) e, \quad \text{где } z_e = x_e + iy_e \in \mathbb{C},$$

означает в точности существование и единственность линейного выражения

$$w = \sum_e x_e e + \sum_e y_e ie$$

вектора w через векторы e и ie с вещественными коэффициентами $x_e = \operatorname{Re} z_e$, $y_e = \operatorname{Im} z_e$. В частности, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W$, где для избежания недоразумений мы здесь и далее пишем $\dim_{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}}$ для обозначения размерности векторных пространств над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Обратите внимание, что вещественные векторные пространства, возникающие как овеществления комплексных, всегда чётномерны.

Комплексно линейные операторы $F : W \rightarrow W$ составляют алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ над полем $\mathbb{C}$, а вещественно линейные $G : W_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}$ — алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ над полем $\mathbb{R}$, содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$. Сопоставление операторам из $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ и $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ их матриц, соответственно, в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ и базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ отождествляет алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ с алгеброй $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера $n \times n$, а алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ — с алгеброй $\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $2n \times 2n$, которые мы будем записывать блочно:

$$G = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \quad (15-1)$$

согласно разбиению базиса $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ на части $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $i\mathbf{e} = (ie_1, \dots, ie_n)$.

Предложение 15.1 (условия Коши – Римана)

Вещественно линейный оператор (15-1) тогда и только тогда комплексно линеен, когда $C = -B$ и $D = A$. В базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над полем $\mathbb{C}$ такой оператор записывается комплексной $n \times n$ -матрицей $A + iB$.

Доказательство. Комплексная линейность вещественно линейного оператора $F : W \rightarrow W$ равносильна равенству $F(iw) = iF(w)$ для всех $w \in W$, что достаточно проверить на базисных векторах $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Если F имеет матрицу (15-1), то $F(i\mathbf{e}) = \mathbf{e}C + i\mathbf{e}D$, а $iF(\mathbf{e}) = i(\mathbf{e}A + i\mathbf{e}B) = -\mathbf{e}B + i\mathbf{e}A$, откуда $C = -B$, $D = A$ и $F(\mathbf{e}) = \mathbf{e}(A + iB)$. $\square$

Пример 15.1 (комплексно дифференцируемые функции)

Рассмотрим одномерное комплексное пространство $W = \mathbb{C}$ со стандартным базисным вектором $e = 1$. Его овеществление $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ имеет базис $(e, ie) = (1, i)$. Каждый комплексно линейный

оператор $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является умножением на некое комплексное число $z = a + ib$ и в базисе $(1, i)$ записывается 2×2 -матрицей

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Произвольная функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto w = f(z)$, одной переменной $z \in \mathbb{C}$, представляет собою отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и может быть задана парой вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ от двух вещественных переменных x, y , связанных с комплексными переменными z, w по формулам $w = u + iv$, $z = x + iy$. Функция f называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если её приращение как функции от z имеет вид

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + \zeta \cdot \Delta z + o(\Delta z), \text{ где } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Функция f называется *вещественно дифференцируемой*, если

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\Delta x, \Delta y), \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Из курса анализа известно, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, в обоих случаях выражаются через производные:

$$\zeta = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x, y_0) - g(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(x_0, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Из [предл. 15.1](#) вытекает, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, когда эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

15.2. Комплексификация вещественного пространства. Каждое векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ канонически расширяется до векторного пространства $V_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ над $\mathbb{C}$, которое называется *комплексификацией* пространства V . Умножение разложимого тензора $c \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$ на комплексное число $z \in \mathbb{C}$ задаётся правилом $z(c \otimes v) = (zc) \otimes v$, которое корректно продолжается до $\mathbb{R}$ -линейного отображения $z: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, $w \mapsto zw$, линейно зависящего от $z \in \mathbb{C}$.

УПРАЖНЕНИЕ 15.1. Убедитесь в этом.

Поскольку числа $1, i \in \mathbb{C}$ составляют базис поля $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$, каждый вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ однозначно записывается в виде $w = 1 \otimes u + i \otimes v$, где $u, v \in V$. Векторы вида $1 \otimes v$, где $v \in V$, называются *вещественными* и образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, изоморфное исходному пространству V . Они составляют вещественное векторное подпространство в $V_{\mathbb{C}}$, которое обозначается через $V \subset V_{\mathbb{C}}$. Векторы вида $i \otimes v$, где $v \in V$, называются *чисто мнимыми*. Они тоже образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, также изоморфное исходному пространству V . Рассматриваемое как вещественное векторное подпространство в $V_{\mathbb{C}}$, оно обозначается через $iV \subset V_{\mathbb{C}}$. Таким образом, как векторное пространство над $\mathbb{R}$, пространство $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ является прямой суммой двух копий векторного пространства V . По этой причине векторы $w = 1 \otimes u + i \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$, где $u, v \in V$, обычно записывают как $w = u + iv \in V \oplus iV$,

где $u, v \in V$. Векторы $u \in V$ и $iv \in iV$ называются *вещественной* и *мнимой* частями вектора $w \in V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$. В этих обозначениях умножение вектора $w = u + iv$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ задаётся той же формулой

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

что и умножение чисел в поле $\mathbb{C}$. Действительно:

$$(x + iy)(1 \otimes u + i \otimes v) = x \otimes u - y \otimes v + ix \otimes v + iy \otimes u = 1 \otimes (xu - yv) + i \otimes (xv + yu).$$

Каждый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V над полем $\mathbb{R}$, рассматриваемый как набор векторов из вещественного подпространства $V \subset V_{\mathbb{C}}$, является базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$, поскольку единственность представления векторов $v_1, v_2 \in V$ в виде $v_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $v_2 = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ с $x_v, y_v \in \mathbb{R}$ равносильна единственности представления вектора $w = v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$ в виде

$$w = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n, \text{ где } z_v = x_v + iy_v \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

15.2.1. Комплексное сопряжение. На пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеется $\mathbb{R}$ -линейная инволюция

$$\sigma : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad w = v_1 + iv_2 \mapsto \overline{w} \stackrel{\text{def}}{=} v_1 - iv_2,$$

которая называется *комплексным сопряжением*. По построению, $\sigma^2 = \text{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, и вещественные подпространства V и iV являются собственными подпространствами оператора σ с собственными числами $+1$ и -1 соответственно. По отношению к умножению на комплексные числа инволюция σ *полулинейна*, т. е. удовлетворяет для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in V_{\mathbb{C}}$ соотношению $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.

15.2.2. Комплексификация операторов. Каждый $\mathbb{R}$ -линейный оператор $F : V' \rightarrow V''$ между вещественными векторными пространствами продолжается до $\mathbb{C}$ -линейного оператора

$$F_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} F : V'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V' \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V'' = V''_{\mathbb{C}}$$

который называется *комплексификацией* оператора F и действует по правилу

$$F_{\mathbb{C}}(u + iv) = F(u) + iF(v), \text{ где } u + iv \in V' \oplus iV' = V'_{\mathbb{C}},$$

ибо $\text{Id}_{\mathbb{C}} \otimes F(1 \otimes u + i \otimes v) = 1 \otimes Fu + i \otimes Fv = Fu + iFv$. Оператор $F_{\mathbb{C}}$ коммутирует с комплексным сопряжением: для каждого $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$ выполняются равенства

$$\overline{F_{\mathbb{C}} w} = \overline{F_{\mathbb{C}}(u + iFv)} = \overline{Fu + iFv} = Fu - iFv = F_{\mathbb{C}}(u - iv) = F_{\mathbb{C}}(\overline{w}). \quad (15-2)$$

В частности, равенства $Fw = \lambda w$ и $F\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$, получающиеся друг из друга комплексным сопряжением, равносильны, а значит, вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда является собственным для оператора $F_{\mathbb{C}}$ с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$, когда сопряжённый вектор $\overline{w}$ собственный для $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжённым собственным числом $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Предложение 15.2

Комплексная линейная оболочка $W = \text{span}_{\mathbb{C}}(w, \overline{w}) \subset V_{\mathbb{C}}$ пары сопряжённых собственных векторов $w = v_1 + iv_2$ и $\overline{w} = v_1 - iv_2$ оператора $F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ с сопряжёнными собственными числами

$\lambda = a + ib$ и $\bar{\lambda} = a - ib$ является комплексификацией вещественного инвариантного подпространства $U = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset V$ оператора $F: V \rightarrow V$, и ограничение $F|_U: U \rightarrow U$ имеет в образующих (v_1, v_2) матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (15-3)$$

Доказательство. Равенство $F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2)$ означает, что

$$F(v_1) + iF(v_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2),$$

откуда $F(v_1) = av_1 - bv_2$, $F(v_2) = bv_1 + av_2$. Тем самым, оператор F переводит вещественное подпространство $U = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ в себя и его ограничение на U имеет в образующих (v_1, v_2) матрицу (15-3). Комплексификация $U_{\mathbb{C}} = \text{span}_{\mathbb{C}}(v_1, v_2)$ содержит векторы $w = v_1 + iv_2$ и $\bar{w} = v_1 - iv_2$. Она линейно порождается этими векторами над $\mathbb{C}$, так как $v_1 = (w + \bar{w})/2$, а $v_2 = (w - \bar{w})/2i$. $\square$

Следствие 15.1 (Ср. с [ПРИМ. 9.5](#))

Каждый $\mathbb{R}$ -линейный оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. $\square$

Замечание 15.1. Для вещественного собственного числа $\lambda \in \text{Spec } F$ [предл. 15.2](#) утверждает, что все комплексные собственные векторы оператора $F_{\mathbb{C}}$ лежат в комплексификации $\mathbb{C} \otimes V_{\lambda} \subset V_{\mathbb{C}}$ вещественного собственного подпространства $V_{\lambda} \subset V$ оператора F . Так как при $u, w \in V$ равенство $F_{\mathbb{C}}(u + iw) = Fu + iFw = \lambda(u + iw)$ равносильно равенствам $Fu = \lambda u$, $Fw = \lambda w$, мы заключаем, что отвечающее вещественному собственному числу λ собственное подпространство оператора $F_{\mathbb{C}}$ совпадает с $\mathbb{C} \otimes V_{\lambda}$.

Замечание 15.2. В любом вещественном базисе $e_1, \dots, e_n \in V$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$ операторы F и $F_{\mathbb{C}}$ имеют одну и ту же вещественную матрицу. Поэтому их характеристические многочлены одинаковы и имеют вещественные коэффициенты: $\chi_F(t) = \chi_{F_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$. В частности, невещественные собственные числа оператора $F_{\mathbb{C}}$ разбиваются на пары комплексно сопряжённых, имеющих одинаковые кратности, что согласуется с [предл. 15.2](#).

Идущее ниже [предл. 15.3](#) утверждает, что разбиение на комплексно сопряжённые пары имеет место для всех невещественных элементарных делителей оператора $F_{\mathbb{C}}$. Напомню, что по [теор. 9.1](#) на стр. 145 каждый вещественно линейный оператор F подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец вида $\mathbb{R}[t]/((t - \lambda)^m)$ и $\mathbb{R}[t]/((t^2 - 2bt + a)^m)$, где $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ и $b^2 < a$.

Предложение 15.3

Каждый элементарный делитель вида $(t - \lambda)^m$ оператора F является элементарным делителем оператора $F_{\mathbb{C}}$, а каждому элементарному делителю вида $(t^2 - 2bt + a)^m$ с $b^2 < a$ оператора F отвечают два сопряжённых элементарных делителя $(t - \mu)^m$ и $(t - \bar{\mu})^m$ оператора $F_{\mathbb{C}}$ с

$$\mu = b + i\sqrt{a - b^2} \in \mathbb{C},$$

и никаких других элементарных делителей у $F_{\mathbb{C}}$ нет.

Доказательство. Из [прим. 13.8](#) на стр. 222 вытекает, что в условиях предложения

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{((t-\lambda)^m)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{((t-\lambda)^m)} \quad \text{и} \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{((t^2-2bt+a)^m)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{((t-\mu)^m)} \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{((t-\bar{\mu})^m)}.$$

Поэтому оператор $F_{\mathbb{C}}$ подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец, полученной заменой каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/((t-\lambda)^m)$ слагаемым $\mathbb{C}[t]/((t-\lambda)^m)$, а каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/((t^2-2bt+a)^m)$ — суммой $\mathbb{C}[t]/((t-\mu)^m) \oplus \mathbb{C}[t]/((t-\bar{\mu})^m)$. $\square$

Следствие 15.2

Для каждого вещественного собственного числа $\lambda \in \text{Spec}(F)$ комплексификации

$$\mathbb{C} \otimes V_{\lambda}, \mathbb{C} \otimes K_{\lambda} \subset \mathbb{C} \otimes V$$

собственного и корневого подпространств $V_{\lambda}, K_{\lambda} \subset V$ оператора F являются, соответственно, собственным и корневым подпространствами оператора $F_{\mathbb{C}}$. $\square$

Следствие 15.3

Для каждого невещественного собственного числа $\lambda \in \text{Spec}(F_{\mathbb{C}})$ комплексное сопряжение

$$V_{\mathbb{C}} \simeq V_{\bar{\mathbb{C}}}, \quad w \mapsto \bar{w},$$

задаёт $\mathbb{C}$ -полулинейные изоморфизмы $K_{\lambda} \simeq K_{\bar{\lambda}} = \bar{K}_{\lambda}$ и $V_{\lambda} \simeq V_{\bar{\lambda}} = \bar{V}_{\lambda}$ между корневыми и собственными подпространствами оператора $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжёнными собственными числами λ и $\bar{\lambda}$, а прямые суммы $K_{\lambda} \oplus K_{\bar{\lambda}}$ и $V_{\lambda} \oplus V_{\bar{\lambda}}$ являются комплексификациями собственного и корневого подпространств $V_{\lambda}, K_{\lambda} \subset V$ оператора F . $\square$

15.2.3. Комплексификация билинейной формы. Как и линейные операторы, каждую вещественно билинейную форму $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ можно продолжить до комплексно билинейной формы $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, значения которой на векторах $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ вычисляются по правилу

$$\beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)).$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Покажите, что $\mathbb{C}$ -билинейное продолжение $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$ -билинейной формы $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е. $\overline{\beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)} = \beta_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Матрица Грама формы $\beta_{\mathbb{C}}$ в любом вещественном базисе пространства $V_{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей Грама формы β в том же базисе. Если форма β симметрична или кососимметрична, то такова же и её комплексификация $\beta_{\mathbb{C}}$. Обратите внимание, что классифицирующий вещественные симметричные билинейные формы инвариант — сигнатура¹ — после комплексификации утрачивается, поскольку все симметричные комплексно билинейные формы заданного ранга изометрически изоморфны² друг другу над полем $\mathbb{C}$. В частности, $\mathbb{C}$ -билинейная комплексификация евклидова скалярного произведения представляет собою невырожденную форму, имеющую комплексные изотропные подпространства³ размерности $[\dim V/2]$.

¹См. раздел 14.5 на стр. 190 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

²См. следствие 13.1 на стр. 181 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.

³См. раздел 13.2.2 на стр. 174 той же лекции.

15.2.4. Полуторалинейное продолжение билинейной формы. В метрической геометрии вместо $\mathbb{C}$ -билинейного продолжения вещественной билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V обычно используется *полуторалинейное* (или *эрмитово*) продолжение $\beta_H : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, которое $\mathbb{C}$ -линейно по первому аргументу и полулинейно¹ по второму. Это означает, что $\beta_H(zw_1, w_2) = z\beta_H(w_1, w_2)$, но $\beta_H(w_1, zw_2) = \bar{z}\beta_H(w_1, w_2)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$. Значение такой формы на векторах $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ равно

$$\beta_H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)). \quad (15-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.3. Покажите, что полуторалинейное продолжение $\beta_H : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$ -билинейной формы $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е. $\beta_H(w_1, w_2) = \beta_H(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathbb{R}$ -билинейная форма $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ симметрична, то вещественная часть её эрмитова продолжения $\text{Re } g_H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2)$ является симметричной $\mathbb{R}$ -билинейной формой $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$, а мнимая часть $\text{Im } g_H(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(v_1, u_2) - g(u_1, v_2)$ кососимметрична. Поэтому эрмитово продолжение симметричной формы при перестановке аргументов сопрягается: $g_H(w_2, w_1) = \overline{g_H(w_1, w_2)}$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$. Это свойство называют *эрмитовой симметричностью*. В частности, эрмитов скалярный квадрат любого вектора веществен: $g_H(w, w) = \overline{g_H(w, w)} \in \mathbb{R}$ для всех $w \in V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathbb{R}$ -билинейная форма $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ кососимметрична, то наоборот $\mathbb{R}$ -билинейная форма $\text{Re } \omega_H$ кососимметрична, а $\text{Im } \omega_H$ симметрична. Поэтому скалярные квадраты всех векторов относительно эрмитово продолженной формы ω_H чисто мнимы: для всех $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$

$$\omega_H(w, w) = 2i \omega(u, v) \in i\mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 15.2 (Эрмитово продолжение евклидовой структуры)

Рассмотрим вещественное векторное пространство V с евклидовым скалярным произведением² $(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и его эрмитово продолжение $(*, *)_H : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ пространства V . Форма $(*, *)_H$ эрмитово симметрична, вещественно билинейна, комплексно полуторалинейна и *положительна* в том смысле, что $(w, w)_H > 0$ для всех ненулевых $w \in V_{\mathbb{C}}$. Абстрактное комплексное векторное пространство W , оснащённое формой $(*, *) : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ с такими свойствами, называется *эрмитовым*, а сама форма — *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой* на W .

Например, комплексификацией вещественного координатного пространства $V = \mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой структурой $(x, y) = \sum x_\nu y_\nu$ является комплексное координатное пространство $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ с эрмитовой структурой $(z, w)_H = \sum z_\nu \bar{w}_\nu$, которая называется *стандартной эрмитовой структурой* на $\mathbb{C}^n$.

Аналогично, комплексификацией пространства $C^0([a, b], \mathbb{R})$ вещественных непрерывных функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad (15-5)$$

¹См. раздел 2.1.3 на стр. 23 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_02.pdf.

²См. определение 3.1 на стр. 33 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

является пространство $C^0([a, b], \mathbb{C})$ непрерывных функций $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ с эрмитовой структурой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (15-6)$$

где под интегралом от комплекснозначной функции f по определению понимается комплексное число

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx,$$

действительная и мнимая части которого равны интегралам от вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функции f .

15.3. Эрмитовы пространства. Векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если на нём задана полуторалинейная эрмитово симметричная положительная форма¹

$$(*, *) : W \times W \rightarrow \mathbb{C}, \quad (15-7)$$

где *полуторалинейность* означает, что $z(u, w) = (zu, w) = (u, \bar{z}w)$ для всех $u, w \in W$ и $z \in \mathbb{C}$, эрмитова симметричность — что $(u, w) = \overline{(w, u)}$ для всех $u, w \in W$, а положительность — что вещественное число $(v, v) = \overline{(v, v)}$ положительно для всех ненулевых $v \in W$. Выше мы видели, что комплексификация любого вещественного евклидова пространства имеет каноническую эрмитову структуру, задаваемую полуторалинейным продолжением евклидова скалярного произведения. Выясним, что означает эрмитовость с точки зрения вещественного пространства $W_{\mathbb{R}}$.

На эрмитовом пространстве W с полуторалинейным скалярным произведением (15-7) имеются две вещественных билинейных формы $g, \omega : W_{\mathbb{R}} \times W_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, равные соответственно вещественной и мнимой части эрмитова скалярного произведения:

$$g(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(u, w). \quad (15-8)$$

Эрмитова симметричность комплекснозначной формы $(u, w) = g(u, w) + i\omega(u, w)$ равносильна симметричности формы g и кососимметричности формы ω . Положительность формы (u, w) влечёт положительность формы g , которая таким образом задаёт евклидову структуру на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Равенство

$$(u, iw) = -i(u, w)$$

равносильно паре равенств $g(u, iw) = \omega(u, w)$ и $\omega(u, iw) = -g(u, w)$, превращающихся друг в друга при замене w на iw . На языке матриц первое из этих равенств означает, что записанные в произвольном базисе пространства $W_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица оператора $I : W_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}, w \mapsto iw$, связаны соотношением $GI = \Omega$, из которого вытекает, в частности, что $\det \Omega \neq 0$, т. е. форма ω невырождена и задаёт на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$ симплектическую структуру.

Наоборот, пусть на вещественном векторном пространстве V заданы

- евклидова структура² $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

¹Любая такая форма называется *эрмитовой структурой* на комплексном пространстве W .

²Т. е. симметричная положительно определённая $\mathbb{R}$ -билинейная форма.

- симплектическая структура¹ $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ -линейный эндоморфизм $I : V \rightarrow V$ с квадратом $I^2 = -\text{Id}_V$.

Оператор I с таким свойством называется *комплексной структурой* на вещественном векторном пространстве V , поскольку позволяет определить умножение векторов $v \in V$ на комплексные числа $z = x + iy \in \mathbb{C}$ формулой

$$(x + iy)v \stackrel{\text{def}}{=} xv + yI(v). \quad (15-9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.4. Убедитесь, что эта формула задаёт на V структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}$, и выведите отсюда, что вещественная размерность $\dim_{\mathbb{R}} V$ чётна.

Рассмотрим V как комплексное векторное пространство и обозначим через

$$(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

вещественно билинейную форму, сопоставляющую векторам $u, w \in V$ комплексное число

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} g(u, w) + i\omega(u, w) \quad (15-10)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.5. Убедитесь, что эта форма вещественно билинейна, эрмитово симметрична и положительна.

Данные (I, g, ω) называются *кэлеровой тройкой*, если они удовлетворяют [лем. 15.1](#) ниже.

ЛЕММА 15.1

Следующие свойства тройки (I, g, ω) эквивалентны друг другу:

- 1) форма (15-10) задаёт на комплексном векторном пространстве V эрмитову структуру
- 2) форма (15-10) $\mathbb{C}$ -линейна по первому аргументу
- 3) форма (15-10) $\mathbb{C}$ -полулинейна по второму аргументу
- 4) $g(u, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$
- 5) $\omega(u, Iw) = -g(u, w)$ для всех $u, w \in V$
- 6) записанные в одном базисе пространства V над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица оператора I связаны равенством $GI = \Omega$.

Доказательство. Равенство $(Iu, w) = i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(Iu, w) = -\omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(Iu, w) = g(u, w),$$

переходящих друг в друга при замене u на Iu , так как $I^2 = -\text{Id}$. Равенство $(u, Iw) = -i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(u, Iw) = \omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, Iw) = -g(u, w),$$

переходящих друг в друга при замене w на Iw . В силу симметричности g и кососимметричности ω выполнение для всех $u, w \in V$ первой пары равенств эквивалентно выполнению второй. Это доказывает эквивалентность первых пяти свойств. Условие (6) является матричной записью условия (4). $\square$

¹Т. е. невырожденная кососимметричная $\mathbb{R}$ -билинейная форма.

Следствие 15.4

Задание эрмитовой структуры на комплексном векторном пространстве эквивалентно заданию кэлеровой тройки на его овеществлении. $\square$

Следствие 15.5

Любые два элемента кэлеровой тройки (I, g, ω) однозначно задают третий. $\square$

Доказательство. Это вытекает из свойства (6) и обратимости матриц I, G, Ω . $\square$

Следствие 15.6

Оператор I в кэлеровой тройке (I, g, ω) одновременно является ортогональным для g и симплектическим для ω , т. е. $g(Iu, Iw) = g(u, w)$ и $\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$.

Доказательство. Из (1) вытекает, что $(Iu, Iw) = (u, w)$. Сравнивая вещественную и мнимую части, получаем требуемое. $\square$

15.3.1. Эрмитова норма вектора. Вещественное число

$$\|w\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} = \sqrt{g(w, w)} \quad (15-11)$$

называется *эрмитовой нормой* или *длиной* вектора $w \in W$. Обратите внимание, что эрмитова длина совпадает с евклидовой длиной вектора w относительно вещественного евклидова скалярного произведения g на $W_{\mathbb{R}}$. Эрмитово скалярное произведение $W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ однозначно восстанавливается по функции длины $W \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку в силу эрмитовой симметричности и комплексной полуторалинейности скалярного произведения

$$2 \operatorname{Re}(w_1, w_2) = (w_1, w_2) + \overline{(w_1, w_2)} = (w_1, w_2) + (w_2, w_1) = \quad (15-12)$$

$$= (w_1 + w_2, w_1 + w_2) - (w_1, w_1) - (w_2, w_2) = \quad (15-13)$$

$$= \|w_1 + w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2 \quad (15-14)$$

$$2 \operatorname{Im}(w_1, w_2) = -i((w_1, w_2) - \overline{(w_1, w_2)}) = i(w_2, w_1) - i(w_1, w_2) = \quad (15-15)$$

$$= (w_1 + iw_2, w_1 + iw_2) - (w_1, w_1) - (w_2, w_2) = \quad (15-16)$$

$$= \|w_1 + iw_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2. \quad (15-17)$$

15.3.2. Матрицы Грама. На матричном языке эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама¹ $G_w = ((w_i, w_j)) = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w}$ любого набора векторов $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ транспонирована своей комплексно сопряжённой: $G_w^t = \overline{G_w}$. Комплексные матрицы с таким свойством называются *эрмитовыми* или *эрмитово симметричными*. Так как эрмитово скалярное произведение полулинейно по второму аргументу, при линейной замене векторов по формуле $\mathbf{w} = \mathbf{u} C_{uw}$ матрица Грама меняется по правилу

$$G_w = \mathbf{w}^t \mathbf{w} = C_{uw}^t \mathbf{u}^t \mathbf{u} \overline{C_{uw}} = C_{uw}^t G_u \overline{C_{uw}}.$$

Определение 15.1

Набор векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в эрмитовом пространстве W называется *ортонормальным* если его матрица Грама G_e единичная, т. е. когда все векторы попарно ортогональны друг другу и имеют единичные скалярные квадраты.

¹Здесь и далее при перемножении матриц, элементами которых являются векторы пространства W , мы считаем, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} (u, w) \in \mathbb{C}$. Таким образом, произведение двух матриц из векторов является матрицей из комплексных чисел. Ср. с п° 5.3.1 на стр. 95.

Предложение 15.4 (ортогонализация Грама – Шмидта)

В $\mathbb{C}$ -линейной оболочке любого набора ненулевых векторов $w_1, \dots, w_m$ эрмитова пространства W имеется такой ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$, что при каждом k линейная оболочка векторов $w_1, \dots, w_k$ содержится в линейной оболочке векторов $e_1, \dots, e_k$.

Доказательство. В качестве первого вектора искомого базиса возьмём $e_1 = w_1 / \|w_1\|$. Пусть для векторов $w_1, \dots, w_k$ уже построены такие ортонормальные векторы $e_1, \dots, e_i$, что $i \leq k$ и

$$\text{span}(e_1, \dots, e_i) = \text{span}(w_1, \dots, w_k). \quad (15-18)$$

Положим $v_{i+1} = w_{k+1} - \sum_{v=1}^i (w_{k+1}, e_v) \cdot e_v$. Так как для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(v_{i+1}, e_j) = (w_{k+1}, e_j) - (w_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, вектор v_{i+1} ортогонален подпространству (15-18). Если $v_{i+1} = 0$, то вектор w_{k+1} лежит в подпространстве (15-18) и набор $w_1, \dots, w_k$ можно увеличить до набора $w_1, \dots, w_{k+1}$. Если $v_{i+1} \neq 0$, добавляем к векторам $e_1, \dots, e_i$ вектор $e_{i+1} = v_{i+1} / \|v_{i+1}\|$ и заключаем, что $\text{span}(e_1, \dots, e_{i+1}) = \text{span}(w_1, \dots, w_{k+1})$. $\square$

Замечание 15.3. Описанный в доказательстве предл. 15.4 индуктивный способ построения ортонормального базиса называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

Следствие 15.7

Определитель Грама $\det G_w$ любого набора векторов $w = (w_1, \dots, w_m)$ является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль если и только если w линейно зависим.

Доказательство. Пусть $w = e C_{ew}$, где $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормальный базис в $\text{span } w$. Тогда $G_w = C_{ew}^t \overline{C_{ew}}$. Если $n < m$, то ранг матрицы G_w строго меньше её размера, и $\det G_w = 0$. Если $n = m$, то $\det G_w = \det C_{ew} \cdot \overline{\det C_{ew}} = |\det C_{ew}|^2 > 0$. $\square$

15.3.3. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Неотрицательность определителя Грама любой пары векторов $v, w \in W$

$$\det \begin{pmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v, w) \cdot \overline{(v, w)} \geq 0$$

переписывается как эрмитова версия евклидова неравенства Коши – Буняковского – Шварца¹

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|, \quad (15-19)$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов v и w над полем $\mathbb{C}$, а так как

$$\begin{aligned} \|w_1 + w_2\|^2 &= (w_1 + w_2, w_1 + w_2) = \\ &= \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + (w_1, w_2) + (w_2, w_1) = \\ &= \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2 \operatorname{Re}(w_1, w_2) \leq \\ &\leq \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2|(w_1, w_2)| \leq \\ &\leq \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\|w_1\| \cdot \|w_2\| = (\|w_1\| + \|w_2\|)^2, \end{aligned}$$

мы заключаем, что всех $w_1, w_2 \in W$ справедливо *неравенство треугольника*

$$\|w_1\| + \|w_2\| \geq \|w_1 + w_2\|. \quad (15-20)$$

¹См. следствие 3.1 на стр. 34 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf.

15.3.4. Унитарная группа. Линейный оператор $F : W \rightarrow W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если $\|Fw\| = \|w\|$ для всех $w \in W$. Так как эрмитово скалярное произведение однозначно выражается через длины векторов¹, каждый унитарный оператор F сохраняет скалярное произведение: $(Fv, Fw) = (v, w)$ для всех $v, w \in W$. Поэтому матрица унитарного оператора в любом базисе связана с матрицей Грама этого базиса соотношением

$$F^t G \bar{F} = G. \quad (15-21)$$

Беря определители, заключаем, что $|\det F| = 1$. В частности, каждый унитарный оператор F обратим, и $F^{-1} = \bar{G}^{-1} \bar{F}^t \bar{G} = G^{t-1} \bar{F}^t G^t$. В ортонормальном базисе эта формула редуцируется до

$$F^{-1} = \bar{F}^t. \quad (15-22)$$

Матрицы с таким свойством называются *унитарными*. Унитарные операторы на эрмитовом пространстве W образуют группу, которая обозначается $U(W)$ и называется *унитарной группой* пространства W . Запись унитарных операторов матрицами в фиксированном ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W , задаёт изоморфизм унитарной группы с группой *унитарных матриц*

$$U_n = \{F \in GL_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \bar{F}^t\}.$$

Её подгруппа $SU_n = \{F \in U_n \mid \det F = 1\}$, состоящая из матриц определителя 1, называется *специальной* унитарной группой. Обратите внимание, что в отличие от вещественных ортогональных матриц определитель унитарной матрицы может принимать любое значение на единичной окружности

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}.$$

15.3.5. Эрмитов объём. Зафиксируем в эрмитовом пространстве W какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$ в качестве базиса единичного объёма и определим *эрмитов объём* n -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v = e C_{ev}$ формулой

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\det C_{ev}|.$$

Так как абсолютная величина определителя унитарной матрицы перехода между любыми двумя ортонормальными базисами равна единице, эрмитов объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, а квадрат эрмитова объёма, как и в евклидовом случае, равен абсолютной величине определителя Грама:

$$\text{Vol}^2(v_1, \dots, v_n) = |\det C_{ev}|^2 = \det C_{ev}^t \cdot \overline{\det C_{ev}} = \det(C_{ev}^t \bar{C}_{ev}) = |\det G_v|.$$

15.3.6. Эрмитова двойственность. В силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения каждый вектор w эрмитова пространства W задаёт полулинейно зависящий от w комплексно линейный функционал правого скалярного умножения на w :

$$h_w : W \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto (u, w).$$

Полулинейное отображение

$$h : W \rightarrow W^*, \quad w \mapsto h_w, \quad (15-23)$$

¹См. формулу (15-12) на стр. 255.

называется *эрмитовой корреляцией*. Оно инъективно, поскольку в силу положительности эрмитовой формы $h_w(w) = (w, w) \neq 0$ для любого ненулевого w . Так как пространства W и W^* имеют равные размерности над $\mathbb{C}$, их овеществления имеют одинаковые размерности над $\mathbb{R}$. Поэтому отображение (15-23) является вещественно линейным комплексно полулинейным изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что для любого $\mathbb{C}$ -линейного функционала $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}$ существует единственный такой вектор $u \in W$, что $\varphi(w) = (w, u)$ для всех $w \in W$, причём этот вектор $\mathbb{C}$ -полулинейно зависит от φ .

В частности, у любого базиса $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ эрмитова пространстве W имеется *эрмитово двойственный* базис $\mathbf{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$, состоящий из прообразов $u_i^\times \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(u_i^*)$ ковекторов двойственного к $\mathbf{u}$ базиса $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ в W^* и однозначно задаваемый соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (15-24)$$

На матричном языке эти соотношения означают, что $\mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = E$. Поэтому матрица $C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, линейно выражающая базис $\mathbf{u}^\times$ через базис $\mathbf{u}$ по формуле $\mathbf{u}^\times = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, удовлетворяет равенству

$$E = \mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = \mathbf{u}^t \mathbf{u} \bar{C}_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = G_{\mathbf{u}} \bar{C}_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times},$$

откуда $(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n) \bar{G}_{\mathbf{u}}^{-1}$.

УПРАЖНЕНИЕ 15.6. Убедитесь, что $u_i^{\times \times} = u_i$ для любого базиса $u_1, \dots, u_n$.

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим эрмитово двойственным.

Так как i -я координата любого вектора $w \in W$ в базисе $\mathbf{u}$ равна $u_i^*(w) = (w, u_i^\times)$, разложение вектора w по любому базису $\mathbf{u}$ имеет вид

$$w = \sum_i e_i \cdot (w, e_i^\times). \quad (15-25)$$

15.3.7. Ортогонал и ортогональная проекция. В эрмитовом пространстве W у любого подпространства $U \subset W$ имеется выделенное дополнительное подпространство

$$U^\perp = \{w \in W \mid \forall u \in U (u, w) = 0\} = \{w \in W \mid \forall u \in U (w, u) = 0\},$$

которое называется *ортогоналом* к U . Каждый вектор $w \in W$ задаёт линейный функционал

$$h_w : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto (u, w).$$

Как мы видели выше, существует единственный такой вектор $w_U \in U$, что $(u, w) = (u, w_U)$ для всех $u \in U$. Разность $w_{U^\perp} \stackrel{\text{def}}{=} w - w_U$ лежит в $U^\perp$, так $(u, w_{U^\perp}) = (u, w) - (u, w_U) = 0$ для всех $u \in U$. Полученное нами разложение $w = w_U + w_{U^\perp}$, в котором $w_U \in U$, а $w_{U^\perp} \in U^\perp$, единственно, так как для любого такого разложения и всех $u \in U$ выполняются равенства $(u, w) = (u, w_U)$, однозначно задающие вектор $w_U \in U$. Таким образом, $W = U \oplus U^\perp$.

Комплексно линейный оператор $\pi_U : W \rightarrow W$, $w \mapsto w_U$, проектирующий W на U вдоль $U^\perp$ называется *ортогональным проектором*. Так как для любой пары эрмитово двойственных базисов $u_1, \dots, u_m$ и $u_1^\times, \dots, u_m^\times$ подпространства U выполняются равенства

$$w_U = \sum_i (w_U, u_i^\times) u_i = \sum_i \overline{(u_i^\times, w_U)} u_i = \sum_i \overline{(u_i^\times, w)} u_i = \sum_i (w, u_i^\times) u_i,$$

координатами ортогональной проекции w_U вектора w на U в любом базисе $u_1, \dots, u_m$ подпространства U являются скалярные произведения $(w, u_i^\times)$ вектора w с векторами эрмитово двойственного базиса.

Иначе ортогональная проекция w_U вектора w на U описывается как единственный вектор из U , на котором (нелинейный) функционал $U \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u - w\|$, расстояния до вектора w достигает своего абсолютного минимума на U . В самом деле, для всех $v \in U$

$$\|w - (w_U + v)\|^2 = ((w - w_U) - v, (w - w_U) - v) = \|w - w_U\|^2 + \|v\|^2 \geq \|w - w_U\|^2,$$

и равенство равносильно тому, что $v = 0$.

15.3.8. Угол между комплексными прямыми. В евклидовом пространстве любые две пересекающиеся прямые $L_u = \mathbb{R} \cdot u$ и $L_w = \mathbb{R} \cdot w$ разбивают натянутую на них вещественную плоскость на две пары смежных вертикальных углов, и косинус наименьшего из них равен¹

$$\cos \angle(L_u, L_w) = \frac{|(u, w)|}{\|u\| \cdot \|w\|} = (u/\|u\|, w/\|w\|) \in [0, \pi/2]. \quad (15-26)$$

Обратите внимание, что направляющие векторы единичной длины $u/\|u\|$ и $w/\|w\|$ на каждой прямой единственны с точностью до умножения на ± 1 . Правая часть формулы (15-26) не зависит от выбора этих знаков и в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца принимает значения на отрезке $[0, 1]$.

В овеществлении $W_{\mathbb{R}}$ эрмитова пространства W комплексные прямые

$$L_u = \mathbb{C} \cdot u \quad \text{и} \quad L_w = \mathbb{C} \cdot w$$

представляют собою двумерные вещественные плоскости, пересекающиеся в единственной точке $0 \in W_{\mathbb{R}}$. Их вещественная линейная оболочка $V = L_u \oplus L_w$ является четырёхмерным вещественным пространством. Базисные векторы единичной длины $e_u \in L_u$ и $e_w \in L_w$ замечают в каждой из плоскостей единичную окружность с центром в нуле. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной вещественной трёхмерной сфере $S^3 = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$. Поэтому евклидов угол $\angle(e_u, e_w)$ ограничен и достигает своего минимального значения на некоторой паре векторов e_u, e_w . Этот минимальный угол называется *эрмитовым углом* между комплексными прямыми L_u, L_w и обозначается $\angle(L_u, L_w)$. Покажем, что он вычисляется по той же самой формуле (15-26), что и в евклидовом пространстве.

Пусть векторы $u \in L_u$ и $w \in L_w$ имеют длину 1. При умножении этих векторов на комплексные числа единичной длины $|(u, w)|$ не меняется. Поэтому правая часть формулы (15-26) и сумма² $g^2(u, w) + \omega^2(u, w) = |(u, w)|^2$ не зависят от выбора векторов u и w на единичных окружностях в L_u и L_w . Максимальное значение $\cos^2 \angle(u, w) = g^2(u, w)$ получается при минимальном значении $\omega^2(u, w)$. Покажем, что последнее достигается и равно нулю. Так как форма ω невырождена, для каждого вектора $u \in L_u$ длины 1 вещественное подпространство $u_{\omega}^{\perp} = \{v \in V \mid \omega(u, v) = 0\}$ имеет коразмерность 1 в V и тем самым нетривиально пересекает двумерное подпространство $L_w \subset V$. Поэтому существует такой вектор $w \in L_w$ длины 1, что $\omega^2(u, w) = 0$, а $g^2(u, w) = |(u, w)|^2$ максимально возможное. Для этих векторов формула (15-26) выдаёт минимально возможный евклидов угол между вещественными прямыми $\mathbb{R}u$ и $\mathbb{R}w$ в евклидовой структуре, задаваемой формой g .

¹См. раздел 10.4.2 на стр. 137 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

²Напомним, что $g(u, w) = \operatorname{Re}(u, w)$, а $\omega(u, w) = \operatorname{Im}(u, w)$, см. (15-8).

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 15.1. Тензор $(zc) \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V$ трилинеен по $z \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, v \in V$.

Упр. 15.2. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)} &= \beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = (\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)) = \\ &= (\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)) - i(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)) = \beta_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta_{\mathbb{C}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2). \end{aligned}$$

Упр. 15.3. Пусть $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\beta_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)} &= \beta_{\mathbb{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = (\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(v_1, u_2) - \beta(u_1, v_2)) = \\ &= (\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)) = \beta_{\mathbb{H}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta_{\mathbb{H}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2). \end{aligned}$$

Упр. 15.5. Первое очевидно, второе вытекает из симметричности g и кососимметричности ω , третье — из положительности формы g .