

§13. Тензорные произведения

Всюду в этом параграфе мы обозначаем через K произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через $\mathbb{k}$ — произвольное поле.

13.1. Тензорное произведение модулей. Напомню¹, что множество векторов E в модуле V над коммутативным кольцом K называется *базисом* этого модуля над K , если каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение $v = \sum_{e \in E} x_e e$, в котором коэффициенты $x_e \in K$ отличны от нуля только для конечного числа векторов e . Например, мономы x^k с целыми неотрицательными k образуют базис модуля многочленов $K[x]$, но не образуют базиса в модуле степенных рядов $K[[x]]$. Мы говорим, что множество векторов $B \subset V$ линейно порождает V над K , если каждый вектор из V является *конечной* линейной комбинацией векторов из B , а линейная зависимость множества векторов $M \subset V$ означает, что некоторая *конечная* линейная комбинация этих векторов с ненулевыми коэффициентами равна нулю в V .

Говоря вольно, тензорное произведение модулей $V_1, \dots, V_n$ — это K -линейная оболочка формальных произведений $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ всевозможных векторов $v_i \in V_i$, а все линейные соотношения между такими произведениями порождаются соотношениями дистрибутивности

$$\dots \otimes (xu + yw) \otimes \dots = x \cdot (\dots \otimes u \otimes \dots) + y \cdot (\dots \otimes w \otimes \dots), \quad (13-1)$$

где $x, y \in K$, $u, w \in V_i$ и обозначенные многоточиями соответственные сомножители в левой и правой частях одинаковы. Формализуется это следующим образом.

Обозначим через $\mathcal{V}$ свободный K -модуль, базисом которого являются всевозможные n -буквенные слова $[v_1 \dots v_n]$, где в качестве i -той буквы может выступать любой вектор $v_i \in V_i$. Далее, обозначим через $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ подмодуль, порождённый всеми трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\dots (xu + yw) \dots] - x[\dots u \dots] - y[\dots w \dots], \quad (13-2)$$

где указанные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов одинаковы. Наконец, положим по определению

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V} / \mathcal{R}, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} [v_1 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}. \quad (13-3)$$

Этот модуль называется *тензорным произведением* модулей $V_1, \dots, V_n$ над K , а его элементы называются *тензорами*. Если надо явно указать кольцо K , над которым рассматриваются модули, мы будем писать $\otimes_K$ вместо $\otimes$. Тензоры вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, где $v_i \in V_i$, называются *разложимыми*. По построению, они линейно порождают модуль $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ над K . Подчеркнём, что K -линейная комбинация разложимых тензоров, скорее всего, будет неразложима. В силу того, что все трёхчленные комбинации (13-2) объявлены равными нулю, в модуле $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ выполняются соотношения (13-1), а отображение

$$\tau: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n, \quad (13-4)$$

линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных. Оно называется *тензорным умножением*, и его образ состоит в точности из разложимых тензоров. Обратите внимание, что отображение (13-4) обычно не сюръективно, его образ *не является* K -подмодулем, но его линейная оболочка равна $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Это объясняется тем, что отображение (13-4) не линейно, но при этом однозначно линеаризует все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$.

¹См. н° 5.1.5 на стр. 88.

13.1.1. Полилинейные отображения. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W, \quad (13-5)$$

где $V_1, \dots, V_n$ и W — произвольные K -модули, называется *полилинейным* (или *n -линейным*, когда важно точно указать количество аргументов), если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольном образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda \varphi(\dots, v', \dots) + \mu \varphi(\dots, v'', \dots).$$

Например, 1-линейные отображения $V \rightarrow W$ суть просто линейные отображения, а 2-линейные отображения $V \times V \rightarrow K$ — это билинейные формы на модуле V . Полилинейные отображения (13-5) можно складывать и умножать на элементы из кольца K , так что они тоже образуют K -модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\text{Hom}(V_1, \dots, V_n; W)$ или $\text{Hom}_K(V_1, \dots, V_n; W)$, если важно явно указать кольцо.

ПРИМЕР 13.1 (ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СВОБОДНЫХ МОДУЛЕЙ)

Если все модули V_i свободны с базисами $E_i \subset V_i$, то каждое полилинейное отображение (13-5) однозначно определяется своими значениями $\varphi(e_1, \dots, e_n) \in W$ на всевозможных сочетаниях базисных векторов $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, и эти значения могут быть произвольны. Если они заданы, то на любом наборе векторов $v_i = \sum_{e_i \in E_i} x_{e_i} e_i \in V_i$ отображение φ будет принимать значение

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n} x_{e_1} \dots x_{e_n} \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Если модуль W тоже свободен с базисом $E \subset W$ то векторы $\varphi(e_1, \dots, e_n) \in W$ можно однозначно задавать их координатами в этом базисе. Пусть

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{e \in E} a_{e_1, \dots, e_n}^e e.$$

Сопоставим полилинейному отображению φ набор чисел $a_{e_1, \dots, e_n}^e \in K$, который можно представлять себе как $(n+1)$ -мерную матрицу, ячейки которой нумеруются элементами множества¹ $E \times E_1 \times \dots \times E_n$. В терминах этой матрицы

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(e, e_1, \dots, e_n) \in E \times E_1 \times \dots \times E_n} x_{e_1} \dots x_{e_n} a_{e_1, \dots, e_n}^e e.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа из K сопоставленные этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, мы получаем K -линейный изоморфизм между модулем $\text{Hom}(V_1, \dots, V_n; W)$ и свободным модулем $(n+1)$ -мерных матриц размера $E \times E_1 \times \dots \times E_n$, базис которого нумеруется элементами множества $E \times E_1 \times \dots \times E_n$. При этом изоморфизме стандартная базисная матрица, имеющая единицу в позиции $(e, e_1, \dots, e_n)$ и нули в остальных местах, переходит в полилинейное отображение $\delta_{e_1, \dots, e_n}^e : (v_1, \dots, v_n) \mapsto x_{e_1} \dots x_{e_n} e$, значения которого на базисных векторах суть

$$\delta_{e_1, \dots, e_n}^e(e'_1, \dots, e'_n) = \begin{cases} e, & \text{если } (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (13-6)$$

Если ранги всех модулей конечны, то $\text{rk } \text{Hom}(V_1, \dots, V_n; W) = \text{rk } W \cdot \prod_i \text{rk } V_i$.

¹При $n = 1$ получается обычная двумерная матрица линейного отображения $V \rightarrow W$, строки которой биективно соответствуют базисным векторам пространства W , а столбцы — базисным векторам пространства V .

Предложение 13.1 (универсальное свойство тензорного произведения)

Для любого полилинейного отображения K -модулей $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ существует единственное такое линейное отображение $\bar{\varphi} : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$, что $\varphi = \bar{\varphi} \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & & V_1 \otimes \dots \otimes V_n \\ & \nearrow \tau & \downarrow \bar{\varphi} \\ V_1 \times \dots \times V_n & & \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Доказательство. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \rightarrow W$, переводящее базисный вектор $[v_1 \dots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, \dots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (13-2) в силу полилинейности φ и линейности F имеем

$$\begin{aligned} F([\dots (\lambda u + \mu w) \dots] - \lambda [\dots u \dots] - \mu [\dots w \dots]) &= \\ = F([\dots (\lambda u + \mu w) \dots]) - \lambda F([\dots u \dots]) - \mu F([\dots w \dots]) &= \\ = \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda \varphi(\dots, u, \dots) - \mu \varphi(\dots, w, \dots) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Предложение 13.2 (единственность универсального полилинейного отображения)

Если полилинейные отображения $\tau_1 : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U_1$ и $\tau_2 : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U_2$ обладают универсальным свойством из предл. 13.1, т. е. для любых векторного пространства W и полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ существуют единственные такие линейные отображения $\bar{\varphi}_1 : U_1 \rightarrow W$ и $\bar{\varphi}_2 : U_2 \rightarrow W$, что $\varphi = \bar{\varphi}_1 \circ \tau_1 = \bar{\varphi}_2 \circ \tau_2$, то имеется единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota \tau_1$.

Доказательство. В силу универсальности τ_1 и τ_2 существуют единственные такие линейные отображения $\bar{\tau}_{21} : U_1 \rightarrow U_2$ и $\bar{\tau}_{12} : U_2 \rightarrow U_1$, что $\tau_2 = \bar{\tau}_{21} \tau_1$ и $\tau_1 = \bar{\tau}_{12} \tau_2$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & U_1 & & \\ & \nwarrow \tau_1 & \downarrow \bar{\tau}_{21} & \nearrow \tau_2 & \\ & & U_2 & & \\ & \nearrow \tau_2 & \downarrow \bar{\tau}_{12} & \nwarrow \tau_1 & \\ & & U_1 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & U_2 & & \\ & \nwarrow \tau_2 & \downarrow \bar{\tau}_{12} & \nearrow \tau_1 & \\ & & U_1 & & \\ & \nearrow \tau_1 & \downarrow \bar{\tau}_{21} & \nwarrow \tau_2 & \\ & & U_2 & & \end{array}$$

Равенства $\bar{\tau}_{21} \bar{\tau}_{12} = \text{Id}_{U_2}$ и $\bar{\tau}_{12} \bar{\tau}_{21} = \text{Id}_{U_1}$ выполняются в силу того, что разложения $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ единственны и имеют место для $\varphi = \text{Id}_{U_1}$, $\psi = \text{Id}_{U_2}$. $\square$

Предложение 13.3

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $E_i \subset V_i$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_n, \quad e_i \in E_i. \quad (13-7)$$

В частности, если $\text{rk } V_i = |E_i| < \infty$ для всех i , то $\text{rk } V_1 \otimes \dots \otimes V_n = \prod \text{rk } V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из выражений (13-7), которые мы временно будем воспринимать как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ в соответствующий базисный вектор (13-7) модуля $\mathcal{W}$, универсально, поскольку для полилинейного $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ и линейного $F : \mathcal{W} \rightarrow W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ равносильно выполнению для всех $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ равенств $F(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = \varphi(e_1, \dots, e_n)$, которые однозначно определяют F , если дано φ , и наоборот. По предл. 13.2 имеется единственный линейный изоморфизм $\mathcal{W} \simeq V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, переводящий базисные векторы (13-7) модуля $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, вычисленные в $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. $\square$

Пример 13.2 (многочлены)

Обратите внимание, что предл. 13.3 справедливо и для свободных модулей бесконечного ранга. Например, тензорное произведение n экземпляров модуля многочленов $K[x] \otimes \dots \otimes K[x]$ изоморфно модулю многочленов от n переменных $K[x_1, \dots, x_n]$. Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x^{m_1} \otimes \dots \otimes x^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.

Предостережение 13.1. Для произвольных модулей над произвольным коммутативным кольцом строение модуля $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ отнюдь не очевидно из его определения в терминах образующих и соотношений. Например, при взаимно простых $m, n \in \mathbb{Z}$ тензорное произведение $\mathbb{Z}$ -модулей $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$, поскольку класс $[n]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ обратим, и каждый элемент $[a]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $[a]_m = [na']_m$, откуда каждый разложимый тензор

$$[a]_m \otimes [b]_n = [na']_m \otimes [b]_n = n \cdot ([a']_m \otimes [b]_n) = [a']_m \otimes [nb]_n = [a']_m \otimes [0]_n = 0$$

ибо тензорное произведение с нулевым вектором всегда нулевое:

$$a \otimes 0 = a \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (a \otimes 0) = 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.1. Докажите, что в общем случае $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(\text{нод}(m, n))$.

Предложение 13.4

Для любого K -модуля V отображение $K \otimes V \simeq V$, $x \otimes u \mapsto xu$, является K -линейным изоморфизмом.

Доказательство. Достаточно убедиться, что билинейное отображение

$$\tau : K \times V \rightarrow V, \quad (x, u) \mapsto xu,$$

универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : K \times V \rightarrow W$ отображение $\tilde{\varphi} : V \rightarrow W$ со свойством $\tilde{\varphi}\tau = \varphi$ обязано переводить каждый вектор $v \in V$ в $\varphi(1, v)$. Очевидно, что это отображение линейно и $\tilde{\varphi}(xv) = \varphi(1, xv) = x\varphi(1, v) = \varphi(x, v)$ для любых $x \in K$ и $v \in V$. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 13.2. Докажите, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

13.1.2. Тензорные произведения векторных пространств. Если $V_1, \dots, V_n$ являются векторными пространствами над полем $\mathbb{K}$ размерностей $d_1, \dots, d_n$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ имеет размерность $d_1 \dots d_n$. На геометрическом языке тензорное умножение

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

отображает произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$, где $m_i = d_i - 1$, в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)$ размерности $m = d_1 \dots d_n - 1 = (m_1 + 1) \dots (m_n + 1) - 1$:

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \rightarrow \mathbb{P}_m. \quad (13-8)$$

Оно переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.3. Убедитесь, что отображение (13-8) корректно определено¹, инъективно, и его образ не содержится ни в какой гиперплоскости.

Отображение (13-8) называется *вложением Сегре*. Его образ состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров и называется *многообразием Сегре*. Он линейно порождает объемлющее проективное пространство, имея при этом размерность $m_1 + \dots + m_n$, обычно намного меньшую, чем m . По построению, многообразие Сегре замечается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, \dots, m_n$ так, что подпространства в каждом из семейств попарно не пересекаются, а любые n подпространств из разных семейств пересекаются в одной точке, и каждая точка многообразия Сегре является точкой пересечения n таких подпространств.

ПРИМЕР 13.3 (изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \text{Hom}(U, V)$ и разложимые операторы)

Для произвольных векторных пространств U, W над полем $\mathbb{K}$ имеется билинейное отображение

$$W \times U^* \rightarrow \text{Hom}(U, W) \quad (13-9)$$

переводящее пару $(w, \xi) \in W \times U^*$ в линейный оператор

$$U \rightarrow W, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w, \quad (13-10)$$

с ядром $\text{Ann}(\xi) \subset U$ и образом $\mathbb{K}w$. При ненулевых ξ, w оператор (13-10) имеет ранг 1. Поскольку образ любого оператора $F : U \rightarrow W$ ранга 1 порождается некоторым ненулевым вектором $w \in W$, который определяется по F однозначно с точностью до пропорциональности, значение такого оператора на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$ для некоторого $\xi \in \text{Ann ker } F \subset U^*$, однозначно определяемого по F и w . Мы заключаем, что *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$$

биективно отображает произведение $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*)$ на множество рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов $U \rightarrow W$ ранга 1.

В силу универсального свойства тензорного произведения, билинейное отображение (13-9) однозначно задаёт линейное отображение

$$W \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}(U, W) \quad (13-11)$$

¹Т. е. тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля при любых ненулевых $v_i \in V_i$ и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

переводящее каждый разложимый тензор $w \otimes \xi$ в оператор (13-10). Если пространства U и W конечномерны с базисами $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$, то mn разложимых тензоров $w_j \otimes u_i^*$, где $u_1^*, \dots, u_n^* \in U^*$ образуют двойственный к $u_1, \dots, u_n$ базис пространства U^* , образуют базис пространства $W \otimes U^*$. Отображение (13-11) переводит базисный тензор $w_j \otimes u_i^*$ в линейный оператор

$$U \rightarrow W, \quad u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

матрицей которого в выбранных базисах является стандартная базисная матрица E_{ij} с единицей в клетке (i, j) и нулями в остальных местах. Мы заключаем, что отображение (13-11) является линейным изоморфизмом. В дальнейшем мы часто будем отождествлять пространства $W \otimes U^*$ и $\text{Hom}(U, W)$ при помощи изоморфизма (13-11) и обозначать оператор (13-10) через $w \otimes \xi$. Если записывать операторы $U \rightarrow W$ их матрицами $A = (a_{ij})$ в выбранных выше базисах, то точки $w = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_m = \mathbb{P}(W)$ и $\xi = (y_0 : y_1 : \dots : y_m) \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(U^*)$ перейдут при вложении Сегре в $m \times n$ матрицу $A = w^t \cdot \xi$ с элементами $a_{ij} = x_i y_j$, а его образ, состоящий из матриц ранга 1, задаётся однородными квадратичными уравнениями

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij} a_{\ell k} - a_{ik} a_{\ell j} = 0.$$

Два семейства координатных пространств $\xi \times \mathbb{P}_m$ и $\mathbb{P}_n \times w$ при этом перейдут в два семейства лежащих на многообразии Сегре проективных пространств, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями между строками и столбцами соответственно.

ПРИМЕР 13.4 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)

При $U = W = \mathbb{k}^2$ вложение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и обсуждавшейся в курсе геометрии¹ квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_2(\mathbb{k}))$, точками которой являются ненулевые матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc = 0$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Эта биекция переводит пару точек $(x_0 : x_1)$ и $(y_0 : y_1)$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (y_0 \ y_1) = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_1 y_0 \\ x_0 y_1 & x_1 y_1 \end{pmatrix} \quad (13-12)$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times \{y\}$, $\{x\} \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями [строка 1] : [строка 2] = $(x_0 : x_1)$ и [столбец 1] : [столбец 2] = $(y_0 : y_1)$. В каждом из семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, при этом каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения ровно одной пары прямых из разных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

УПРАЖНЕНИЕ 13.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

13.2. Канонические изоморфизмы. Всюду в этом разделе речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K . Линейные отображения $f : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$ удобно задавать указанием значений $f(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$ на разложимых тензорах, а затем по линейности продолжать f на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают

¹ См. раздел 19.4.1 на стр. 246 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_19.pdf.

модуль $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, такое продолжение единственно при условии, что оно существует. Последнее равносильно тому, что все линейные соотношения, которые имеются между разложимыми тензорами, выполняются и между их образами в модуле W . Поскольку все эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности из форм. (13-1) на стр. 211, мы получаем следующий полезный критерий.

ЛЕММА 13.1

Линейное отображение $f : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$, $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_1, \dots, v_n)$, существует если и только если векторы $f(v_1, \dots, v_n) \in W$ полилинейно зависят¹ от векторов $v_i \in V_i$. $\square$

Предложение 13.5

Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, $u \otimes w \mapsto w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w , оно по лем. 13.1 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \rightarrow W \otimes U$. Аналогично, существует линейное отображение $W \otimes U \rightarrow U \otimes W$, $w \otimes u \mapsto u \otimes w$. Оно обратное предыдущему, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах. $\square$

Предложение 13.6 (ассоциативность тензорного умножения)

Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$ друг в друга.

Доказательство. Поскольку тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w) , существует линейное отображение $V \otimes U \otimes W \rightarrow V \otimes (U \otimes W)$, $v \otimes u \otimes w \mapsto v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w . Поэтому имеется линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \rightarrow V \otimes U \otimes W, \quad u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w,$$

которое само по себе линейно зависит от v . Так как тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$, мы получаем искомое линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \rightarrow V \otimes U \otimes W, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto v \otimes u \otimes w.$$

Изоморфизм $V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. $\square$

Предложение 13.7 (дистрибутивность тензорного умножения)

Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V),$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dot{+} w) \mapsto (v \otimes u) \dot{+} (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dot{+} w) \otimes v \mapsto (u \otimes v) \dot{+} (w \otimes v)$$

где через $a \dot{+} b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

¹Т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм, второй получится из него применением [предл. 13.5](#). Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \rightarrow (V \otimes U) \oplus (V \otimes W), \quad v \otimes (u \dot{+} w) \mapsto (v \otimes u) \dot{+} (v \otimes w), \quad (13-13)$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dot{+} (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dot{+} w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала строим линейные отображения

$$\begin{aligned} f_1 : V \otimes U &\rightarrow V \otimes (U \oplus W), & v \otimes u &\mapsto v \otimes (u \dot{+} 0), \\ f_2 : V \otimes W &\rightarrow V \otimes (U \oplus W), & v \otimes w &\mapsto v \otimes (0 \dot{+} w), \end{aligned}$$

затем складываем их в отображение

$$f : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \rightarrow V \otimes (U \oplus W), \quad a \dot{+} b \mapsto f_1(a) + f_2(b),$$

очевидно, линейное и обратное к (13-13). $\square$

13.3. Тензорное произведение линейных отображений. Для любого набора K -линейных отображений $f_i : U_i \rightarrow W_i$ между произвольными модулями над коммутативным кольцом K , тензор

$$f_1(u_1) \otimes \dots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes \dots \otimes W_n$$

полилинейно зависит от векторов $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$\begin{aligned} f_1 \otimes \dots \otimes f_n : U_1 \otimes \dots \otimes U_n &\rightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_n, \\ u_1 \otimes \dots \otimes u_n &\mapsto f_1(u_1) \otimes \dots \otimes f_n(u_n). \end{aligned}$$

Оно называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \rightarrow W_i$.

ПРИМЕР 13.5 (КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ)

Рассмотрим векторные пространства U и W с базисами $u_1, \dots, u_n \in U$ и $w_1, \dots, w_m \in W$. Если линейные операторы $f : U \rightarrow U$ и $g : W \rightarrow W$ имеют в этих базисах матрицы $F = (\varphi_{ij})$ и $G = (\gamma_{k\ell})$, то матрица оператора $f \otimes g : U \otimes W \rightarrow U \otimes W$ в базисе из тензоров $u_j \otimes w_\ell$ имеет размеры $(mn) \times (mn)$, а её элементы естественно нумеруются упорядоченными парами (α, β) , $1 \leq \alpha \leq n$, $1 \leq \beta \leq m$. Эта матрица называется *кронекеровым произведением* матриц F , G и обозначается $F \otimes G$. Поскольку

$$f \otimes g (u_j \otimes w_\ell) = \left(\sum_i u_i \varphi_{ij} \right) \otimes \left(\sum_k w_k \gamma_{k\ell} \right) = \sum_{i,k} \varphi_{ij} \gamma_{k\ell} \cdot u_i \otimes w_k,$$

в пересечении (i, k) -ой строки и (j, ℓ) -го столбца матрицы $F \otimes G$ стоит произведение $\varphi_{ij} \gamma_{k\ell}$. В лексикографически упорядоченном базисе

$$u_1 \otimes w_1, \dots, u_1 \otimes w_m, u_2 \otimes w_1, \dots, u_2 \otimes w_m, \dots, u_n \otimes w_1, \dots, u_n \otimes w_m$$

матрица $F \otimes G$ имеет блочный вид и состоит из n^2 блоков размера $m \times m$, каждый из которых пропорционален матрице G :

$$F \otimes G = (\varphi_{ij}) \otimes (\gamma_{k\ell}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}G & \varphi_{12}G & \dots & \varphi_{1n}G \\ \varphi_{21}G & \varphi_{22}G & \dots & \varphi_{2n}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}G & \varphi_{n2}G & \dots & \varphi_{nn}G \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 13.2

Если гомоморфизмы K -модулей $f_1 : U_1 \twoheadrightarrow W_1$ и $f_2 : U_2 \twoheadrightarrow W_2$ сюръективны, то гомоморфизм $f_1 \otimes f_2 : U_1 \otimes U_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ тоже сюръективен.

Доказательство. Образ $\text{im}(f_1 \otimes f_2)$ содержит все разложимые тензоры $w_1 \otimes w_2 \in W_1 \otimes W_2$. $\square$

ЛЕММА 13.3

Если ненулевой K -модуль F свободен, то для любого инъективного гомоморфизма K -модулей $f : U \hookrightarrow W$ гомоморфизм $\text{Id}_F \otimes f : F \otimes U \rightarrow F \otimes W$ тоже инъективен.

Доказательство. Если $F \simeq K$ имеет ранг 1, изоморфизм из [предл. 13.4](#)

$$K \otimes U \simeq U, \quad x \otimes u \mapsto xu, \quad \text{и} \quad K \otimes W \simeq W, \quad y \otimes w \mapsto yw,$$

отождествляет отображение $\text{Id}_F \otimes f : K \otimes U \rightarrow K \otimes W$ с исходным $f : U \rightarrow W$, инъективным по условию. Произвольный свободный модуль с базисом E является прямой суммой $F \simeq \bigoplus_{e \in E} Ke$ свободных модулей ранга 1, занумерованных базисными векторами $e \in E$. По [предл. 13.7](#) и [предл. 13.4](#) модули

$$\begin{aligned} F \otimes U &\simeq \bigoplus_{e \in E} (Ke \otimes U) \simeq \bigoplus_{e \in E} U_e \\ F \otimes W &\simeq \bigoplus_{e \in E} (Ke \otimes W) \simeq \bigoplus_{e \in E} W_e \end{aligned} \tag{13-14}$$

являются прямыми суммами занумерованных базисными векторами $e \in E$ одинаковых копий $U_e \stackrel{\text{def}}{=} Ke \otimes U \simeq U$ и $W_e \stackrel{\text{def}}{=} Ke \otimes W \simeq W$ модулей U, W , причём изоморфизмы (13-14) отождествляют линейное отображение $\text{Id}_F \otimes f$ с диагональным отображением $\bigoplus_{e \in E} U_e \rightarrow \bigoplus_{e \in E} W_e$, переводящим последовательность векторов $(u_e)_{e \in E}$ в последовательность векторов $(f(u_e))_{e \in E}$. При инъективном f такое отображение тоже инъективно. $\square$

Предостережение 13.2. Если модуль V не свободен, тензорное произведение

$$\text{Id}_V \otimes f : V \otimes U \rightarrow V \otimes W$$

может оказаться не инъективным даже для вложения $f : U \hookrightarrow W$ свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$ -модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto 2z$, при тензорном умножении на тождественный эндоморфизм модуля $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в нулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}/(2) \rightarrow \mathbb{Z}/(2), [1]_2 \mapsto [0]_2$.

13.4. Тензорное произведение модулей, заданных образующими и соотношениями. Напомним¹, что если K -модуль V линейно порождается над K векторами $v_1, \dots, v_n$, то он изоморфен фактору K^n / R_v свободного модуля K^n по подмодулю $R_v \subset K^n$ линейных соотношений между образующими v_i , который состоит из всех таких строк $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, что $\sum x_i e_i = 0$ в V . Следующая далее [теор. 13.1](#) описывает тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$ двух представленных таким способом K -модулей $V_1 \simeq F_1 / R_1$ и $V_2 \simeq F_2 / R_2$ как фактор свободного модуля $F_1 \otimes F_2$ по подмодулю соотношений, устроенному следующим образом. По [лем. 13.3](#) вложения $\iota_1 : R_1 \hookrightarrow F_1$ и $\iota_2 : R_2 \hookrightarrow F_2$ задают вложения $\iota_1 \otimes \text{Id}_{F_2} : R_1 \otimes F_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$ и $\text{Id}_{F_1} \otimes \iota_2 : F_1 \otimes R_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$, позволяющие рассматривать тензорные произведения $R_1 \otimes F_2$ и $F_1 \otimes R_2$ как подмодули свободного модуля $F \otimes G$. Искомый модуль соотношений является линейной оболочкой этих двух подмодулей и обозначается $R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$.

¹См. [н° 5.1.5](#) на стр. 88.

ТЕОРЕМА 13.1

$(F_1/R_1) \otimes (F_2/R_2) \simeq (F_1 \otimes F_2) / (R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2)$ для любых свободных модулей F_1, F_2 над произвольным коммутативным кольцом K и любых их подмодулей $R_1 \subset F_1, R_2 \subset F_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $V_1 = F_1/R_1, V_2 = F_2/R_2, S = R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$. Для любых $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2$ класс $[f_1 \otimes f_2]_S = f_1 \otimes f_2 \pmod{S} \in (F_1 \otimes F_2)/S$ зависит только от классов $[f_1]_{R_1} = f_1 \pmod{R_1} \in V_1$ и $[f_2]_{R_2} = f_2 \pmod{R_2} \in V_2$, так как для всех $r_1 \in R_1, r_2 \in R_2$

$$(f_1 + r_1) \otimes (f_2 + r_2) = f_1 \otimes f_2 + (r_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes r_2) \equiv f_1 \otimes f_2 \pmod{S}.$$

Поэтому корректно определено билинейное отображение

$$\bar{\tau}: V_1 \times V_2 \rightarrow (F_1 \otimes F_2)/S, \quad ([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}) \mapsto [f_1 \otimes f_2]_S, \quad (13-15)$$

включающееся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 & \xrightarrow{\tau} & F_1 \otimes F_2 \\ \pi_1 \times \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ V_1 \times V_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}} & (F_1 \otimes F_2)/S \end{array}$$

где через $\tau: F_1 \times F_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2$ обозначено универсальное билинейное отображение, а

$$\pi_1: F_1 \rightarrow V_1, \quad \pi_2: F_2 \rightarrow V_2, \quad \pi: F_1 \otimes F_2 \rightarrow (F_1 \otimes F_2)/S$$

суть линейные проекции на факторы. Покажем, что отображение (13-15) универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ композиция

$$\varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2): F_1 \times F_2 \rightarrow W, \quad (f_1, f_2) \mapsto \varphi([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}),$$

тоже билинейна. Поэтому существует единственное такое линейное отображение

$$\psi: F_1 \otimes F_2 \rightarrow W,$$

что $\psi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$, т. е. мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 & \xrightarrow{\tau} & F_1 \otimes F_2 \\ \pi_1 \times \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ V_1 \times V_2 & \xrightarrow{\bar{\tau}} & (F_1 \otimes F_2)/S \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \psi \\ \nearrow \bar{\psi} \\ \searrow \varphi \end{array} \quad W. \quad (13-16)$$

Поскольку для всех $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2$ выполняется равенство $\psi(f_1 \otimes f_2) = \varphi([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2})$, отображение ψ аннулирует оба линейно порождающих S подмодуля $R_1 \otimes F_2, F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$ и факторизуется до линейного отображения $\bar{\psi}: (F_1 \otimes F_2)/S \rightarrow W$, удовлетворяющего соотношению $\bar{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Поэтому $\bar{\psi} \circ \bar{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \bar{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Так как

проекция $\pi_1 \times \pi_2$ сюръективна, $\varphi = \bar{\psi} \circ \bar{\tau}$. Остаётся проверить, что любое линейное отображение $\eta : (F_1 \otimes F_2)/S \rightarrow W$, удовлетворяющее соотношению $\varphi = \eta \circ \bar{\tau}$, совпадает с $\bar{\psi}$. Поскольку

$$\eta \circ \pi \circ \tau = \eta \circ \bar{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \bar{\psi} \circ \pi \circ \tau,$$

универсальное свойство отображения τ влечёт равенство $\eta \circ \pi = \bar{\psi} \circ \pi$. Равенство $\eta = \bar{\psi}$ вытекает из него силу сюръективности проекции π . $\square$

Пример 13.6 (ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП)

Из [теор. 13.1](#) вытекает, что для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\mathbb{Z}}{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{(n)} \simeq \frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}}{(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(m, n)} = \frac{\mathbb{Z}}{(\text{нод}(m, n))},$$

где предпоследнее равенство задаётся изоморфизмом из [предл. 13.4](#) на стр. 214. При помощи изоморфизмов дистрибутивности из [предл. 13.7](#) на стр. 217 это позволяет вычислить все тензорные произведения конечно порождённых абелевых групп.

13.5. Тензорное произведение алгебр. Если K -модули A и B являются ассоциативными K -алгебрами¹, то на их тензорном произведении $A \otimes_K B$ имеется естественная структура алгебры, задаваемая покомпонентным перемножением разложимых тензоров

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2) \quad (13-17)$$

продолженным на линейные комбинации разложимых тензоров по дистрибутивности. В самом деле, при фиксированных $a \in A$ и $b \in B$ тензор $(ax) \otimes (by)$ билинеен по $x \in A$ и $y \in B$, и стало быть, корректно определено линейное отображение

$$\lambda_{a \otimes b} : A \otimes B \rightarrow A \otimes B, \quad x \otimes y \mapsto (ax) \otimes (by),$$

билинейно зависящее от $a \in A$ и $b \in B$. Поэтому правило $a \otimes b \mapsto \lambda_{a \otimes b}$ корректно продолжается до линейного отображения

$$\lambda : A \otimes B \rightarrow \text{End}_K(A \otimes B), \quad t \mapsto \lambda_t,$$

сопоставляющего каждому тензору $t : A \otimes B$ линейный оператор $\lambda_t : A \otimes B \rightarrow A \otimes B$ левого умножения на этот тензор так, что разложимые тензоры перемножаются по формуле (13-17). Если алгебры A и B ассоциативны, то и алгебра $A \otimes B$ ассоциативна, поскольку на разложимых тензорах проверка ассоциативности сводится к покомпонентной её проверке отдельно в каждом тензорном множителе. Если в алгебрах A и B есть единицы $1_A \in A$ и $1_B \in B$, то их тензорное произведение $1_A \otimes 1_B$ является единицей алгебры $A \otimes B$, поскольку умножение на $1_A \otimes 1_B$ тождественно действует на разложимые тензоры. Если алгебры A и B коммутативны, то алгебра $A \otimes B$ тоже коммутативна.

Пример 13.7 (МНОГОЧЛЕНЫ, ПРОДОЛЖЕНИЕ [ПРИМ. 13.2](#) НА СТР. 214)

Построенный в [прим. 13.2](#) на стр. 214 изоморфизм K -модулей

$$K[x]^{\otimes n} = K[x] \otimes \dots \otimes K[x] \simeq K[x_1, \dots, x_n], \quad x^{m_1} \otimes \dots \otimes x^{m_n} \mapsto x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

является изоморфизмом K -алгебр, где структура алгебры на $K[x]^{\otimes n}$ задаётся покомпонентным умножением разложимых тензоров, а алгебра многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$ рассматривается со своей стандартной структурой.

¹См. [п. 5.2](#) на стр. 90.

ПРИМЕР 13.8 (ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛЕЙ)

Пусть поле $\mathbb{K} = \mathbb{k}[x]/(f)$ получается из поля $\mathbb{k}$ присоединением корня¹ неприводимого в $\mathbb{k}[x]$ сепарабельного² многочлена $f \in \mathbb{k}[x]$, который над некоторым другим полем $\mathbb{F} \supset \mathbb{k}$ раскладывается в произведение $f = g_1 \dots g_m$ неприводимых в $\mathbb{F}[x]$ многочленов $g_i \in \mathbb{F}[x]$. Обозначим через $\mathbb{L}_i = \mathbb{F}[x]/(g_i)$ поля, получающиеся из $\mathbb{F}$ присоединением корней этих многочленов. В теории чисел и теории Галуа важную роль играет изоморфизм $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F} \simeq \mathbb{L}_1 \times \dots \times \mathbb{L}_m, \quad [h]_f \otimes z \mapsto ([zh]_{g_1}, \dots, [zh]_{g_m}), \quad (13-18)$$

который является композицией изоморфизма

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}[x]/(f), \quad [h]_f \otimes z \mapsto [zh]_f, \quad (13-19)$$

и изоморфизма $\mathbb{F}[x]/(f) \simeq \mathbb{L}_1 \times \dots \times \mathbb{L}_m$, $[h]_f \mapsto ([h]_{g_1}, \dots, [h]_{g_m})$, из китайской теоремы об остатках³, которая имеет место, поскольку в силу сепарабельности многочлена f неприводимые многочлены g_i попарно различны и тем самым попарно взаимно просты в $\mathbb{F}[x]$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.5. Убедитесь, что отображение (13-19) корректно определено и является гомоморфизмом $\mathbb{k}$ -алгебр.

Для доказательства того, что гомоморфизм (13-19) является изоморфизмом, достаточно убедиться, что $\mathbb{k}$ -билинейное отображение векторных пространств над $\mathbb{k}$

$$\tau : \mathbb{K} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}[x]/(f), \quad ([h]_f, z) \mapsto [zh]_f,$$

универсально. Но для любого $\mathbb{k}$ -билинейного отображения $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{F} \rightarrow W$ линейное над $\mathbb{k}$ отображение $\tilde{\varphi} : \mathbb{F}[x]/(f) \rightarrow W$ со свойством $\tilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$ обязано действовать по правилу

$$[z_0 + z_1x + \dots + z_mx^m]_f \mapsto \varphi([1]_f, z_0) + \varphi([x]_f, z_1) + \dots + \varphi([x^m]_f, z_m),$$

где $z_0, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{F}$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. Убедитесь, что это правило и впрямь корректно задаёт $\mathbb{k}$ -линейное отображение $\mathbb{F}[x]/(f) \rightarrow W$.

¹См. п° 2.3.1 на стр. 44.

²См. п° 2.3.4 на стр. 47.

³См. теор. 2.2 на стр. 46.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 13.1. Пусть $\text{нод}(m, n) = d$. Значение $\varphi([a]_m, [b]_n)$ любого $\mathbb{Z}$ -билинейного отображения

$$\varphi : \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n) \rightarrow W \quad (16-13)$$

зависит только от классов $[a]_d, [b]_d \in \mathbb{Z}/(d)$, т. е. имеет вид $\varphi([a]_m, [b]_n) = \varphi([a]_d, [b]_d)$, так как все кратные d числа выражаются в виде $xt + yn$ с $x, y \in \mathbb{Z}$, и

$$\begin{aligned} \varphi([a + k_1 d]_m, [b + k_2 d]_n) &= \\ &= \varphi([a + x_1 m + y_1 n]_m, [b + x_2 m + y_2 n]_n) = \varphi([a]_m + n[y_1]_m, [b]_n + m[x_1]_n) = \\ &= \varphi([a]_m, [b]_n) + n\varphi([y_1]_m, [b]_n) + m\varphi([a]_m, [x_1]_n) + mn\varphi([y_1]_m, [x_1]_n) = \\ &= \varphi([a]_m, [b]_n) + \varphi([y_1]_m, [nb]_n) + \varphi([ma]_m, [x_1]_n) + \varphi([my_1]_m, [nx_1]_n) = \\ &= \varphi([a]_m, [b]_n) + \varphi([y_1]_m, [0]_n) + \varphi([0]_m, [x_1]_n) + \varphi([0]_m, [0]_n) = \varphi([a]_m, [b]_n). \end{aligned}$$

Из этого вытекает, что $\mathbb{Z}$ -билинейное отображение

$$\tau : \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(d), \quad ([a]_m, [b]_n) \mapsto [ab]_d$$

универсально. Действительно, для любого $\mathbb{Z}$ -билинейного отображения (16-13) линейное отображение $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}/(d) \rightarrow W$ со свойством $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \tau$ должно действовать по правилу $[c]_d \mapsto \varphi(1, [c]_d)$, и это правило действительно задаёт такое линейное отображение $\tilde{\varphi}$, что

$$\tilde{\varphi}([ab]_d) = \varphi(1, [ab]_d) = a\varphi(1, [b]_d) = \varphi([a]_d, [b]_d) = \varphi([a]_m, [b]_n).$$

Более короткое, но техничное рассуждение см. в [прим. 13.6](#) на стр. 221.

Упр. 13.2. Покажите, что билинейное отображение $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $(x, y) \mapsto xy$, универсально, вдохновляясь тем, что $\varphi(a/b, c/d) = \varphi(ab/b, c/bd) = \varphi(1, ac/bd)$ для любого $\mathbb{Z}$ -билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow W$.

Упр. 13.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Так как всякая проходящая через заданную точку p прямая, целиком лежащая на квадрике Сегре S , лежит в пересечении $S \cap T_p S$ этой квадрики с её касательной плоскостью в точке p , и плоская коника $S \cap T_p S$ уже полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p прямых из разных семейств, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.