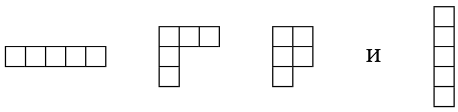
§11. Композиционные факторы, произведения и силовские подгруппы

11.1. Простые группы. Группа G называется *простой*, если она не содержит нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и G. Например, любая группа простого порядка проста, поскольку по теореме Лагранжа[1] вообще не содержит никаких подгрупп кроме $\{e\}$ и G. Согласно сл. 10.1 на стр. 175 простота группы G равносильна тому, что всякий гомоморфизм $G \to H$ либо инъективен, либо тривиален[2]. Одним из выдающихся достижений математики XX века является перечисление всех конечных простых групп. Этот список состоит из нескольких бесконечных серий и 26 так называемых *спорадических групп*, не входящих в серии. Бесконечные серии делятся на три семейства: циклические группы $\mathbb{Z}/(p)$ простого порядка, знакопеременные группы A_n с $n \neq 4$ и простые линейные алгебраические группы над конечными полями[3], такие как $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PSp}_n(\mathbb{F}_q)$ и т. п. Описание конечных простых групп стало итогом сотен работ десятков авторов по различным, напрямую не связанным друг с другом направлениям математики. Никакой универсальной концепции, позволяющей единообразно классифицировать все конечные простые группы не известно.

11.1.1. Простота знакопеременных групп. Покажем, что знакопеременная группа A_5 проста. Так как перестановки сопряжены если и только если у них одинаковый цикловой тип[4], классы сопряжённости чётных перестановок в S_5 состоят из перестановок цикловых типов


(11-1)

(5-циклы, 3-циклы, пары независимых транспозиций и тождественное преобразование), коих имеется[5] соответственно $24 = 5!/5$, $20 = 5!/(3 \cdot 2)$, $15 = 5!/(2^2 \cdot 2)$ и 1.

Упражнение 11.1. Покажите, что класс сопряжённости чётной перестановки g в S_n либо совпадает с её классом сопряжённости в A_n, либо является объединением двух классов сопряжённости в A_n, причём второе происходит если и только если все циклы перестановки g имеют разные нечётные длины.

Мы заключаем, что 3-циклы, пары независимых транспозиций и тождественная перестановка являются классами сопряжённости в A_5, а 5-циклы разбиваются на два класса сопряжённости в A_5, состоящие из 12 циклов, сопряжённых $|1, 2, 3, 4, 5\rangle$, и 12 циклов, сопряжённых $|2, 1, 3, 4, 5\rangle$. Поскольку нормальная подгруппа $H \trianglelefteq A_5$ вместе с каждой перестановкой содержит и все ей сопряжённые, её порядок $|H| = 12\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2 + 20\varepsilon_3 + 15\varepsilon_4 + 1$, где каждый ε_i равен либо 1, либо 0, при этом по теореме Лагранжа $|H|$ делит $|A_5| = 60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Упражнение 11.2. Убедитесь, что такое возможно ровно в двух случаях: когда все $\varepsilon_i = 1$ или когда все $\varepsilon_i = 0$.

Тем самым, в A_5 нет нетривиальных собственных нормальных подгрупп.

---

[1] См. теор. 10.3 на стр. 184.

[2] Т. е. отображает всю группу G в единицу.

[3] Описанию таких групп посвящены спецкурсы по линейным алгебраическим и арифметическим группам, например, см. книгу *Дж. Хамфри. Линейные алгебраические группы*. М., «Наука», 1980.

[4] См. прим. 10.15 на стр. 181.

[5] См. упр. 10.8 на стр. 170.

Теорема 11.1

Все знакопеременные группы A_n с $n \geqslant 5$ просты.

Доказательство. Индукция по n. Случай $n = 5$ был разобран выше. Рассмотрим нормальную подгруппу $N \trianglelefteq A_n$. Так как стабилизатор элемента 1 в группе A_n изоморфен A_{n-1}, его пересечение с N, будучи нормальной подгруппой в A_{n-1}, либо совпадает с A_{n-1}, либо тривиально. Поскольку стабилизаторы всех элементов сопряжены, подгруппа N либо содержит стабилизаторы всех элементов, либо действует свободно[1]. В первом случае N содержит все 3-циклы и по упр. 10.30 на стр. 187 совпадает с A_n. Рассмотрим второй случай и допустим, что N содержит нетождественную перестановку g. Так как она действует без неподвижных точек, при $n \geqslant 6$ найдутся такие различные элементы $\{1, i, j, k, \ell, m\}$, что $g(1) = i$ и $g(j) = k$. Сопрягая g циклом $|k, \ell, m\rangle \in A_n$, получаем перестановку $h \in N$ с $h(1) = i$ и $h(j) = \ell \neq k$. Перестановка $gh^{-1} \in N$ не тождественна и оставляет 1 на месте. Противоречие. □

11.1.2. Простота групп $\mathrm{PSL}_n(\Bbbk)$. Фактор полной линейной группы координатного векторного пространства $\Bbbk^n$ по её центру, состоящему из скалярных матриц λE, где $\lambda \in \Bbbk^\times$, называется *проективной линейной группой* и обозначается $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_n(\Bbbk) / \Bbbk^\times \cdot E$. Эта группа естественным образом действует на множестве одномерных векторных подпространств в $\Bbbk^n$, которое обозначается $\mathbb{P}_{n-1}(\Bbbk)$ и называется $(n-1)$-*мерным проективным пространством*[2] над полем $\Bbbk$. Состоящая из классов пропорциональных матриц определителя 1 подгруппа

$$\mathrm{PSL}_n(\Bbbk) = \mathrm{SL}_n(\Bbbk) / \boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk) \cdot E \subset \mathrm{PGL}_n(\Bbbk)\,,$$

где $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk) \subset \Bbbk^\times$ — мультипликативная группа корней n-той степени из 1 в поле $\Bbbk$, называется *специальной* проективной линейной группой.

Упражнение 11.3. Убедитесь, что PSL_n действует 2-транзитивно[3] на $\mathbb{P}_{n-1}$.

Если $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ состоит из q элементов, то мультипликативная группа $\mathbb{F}_q^\times$ циклическая порядка $q-1$ и корни уравнения $x^n = 1$ образуют в ней циклическую подгруппу порядка нод$(q-1, n)$.

Упражнение 11.4. Убедитесь, корни уравнения $nx = 0$ в $\mathbb{Z}/(m)$ составляют циклическую подгруппу порядка нод(m, n).

Таким образом, $|\,\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| / \text{нод}(q-1, n) = \prod_{k=0}^{n}(q^n - q^k) / \big((q-1)\,\text{нод}(q-1, n)\big)$.

Теорема 11.2

Все группы $\mathrm{PSL}_n(\Bbbk)$ просты, за исключением[4] $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.

Доказательство. Обозначим через $P \subset \mathrm{PSL}_n$ стабилизатор одномерного подпространства, порождённого первым вектором стандартного базиса $e_1, \dots, e_n$ в $\Bbbk^n$. Группа P состоит из классов пропорциональных матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{11-2}$$

[1] Т. е. никакой отличный от единицы элемент не имеет неподвижных точек, см. n° 10.4 на стр. 178.

[2] См. стр. 204 и 222 курса http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_total.pdf.

[3] Т. е. транзитивно действует на упорядоченных парах точек, см. n° 10.4 на стр. 178.

[4] См. упр. 10.32 на стр. 187.

с определителем 1 и содержит нормальную абелеву подгруппу $A \lhd P$ матриц, пропорциональных

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right) = E + \alpha_2 E_{12} + \ldots + \alpha_n E_{1n}\,,$$

которая является ядром гомоморфизма $P \to \mathrm{PGL}_{n-1}$, переводящего матрицу (11-2) в её правую нижнюю угловую подматрицу размера $(n-1) \times (n-1)$.

Упражнение 11.5. Убедитесь, что это и в самом деле гомоморфизм групп.

Так как подгруппа A содержит все трансвекции вида $T_{1j}(\alpha)$, сопряжённые ей подгруппы gAg^{-1}, где $g \in \mathrm{PSL}_n$, содержат вообще все трансвекции и порождают[1] PSL_n.

Упражнение 11.6. Убедитесь, что $T_{ij}(\alpha) = gT_{1j}(\alpha)g^{-1}$, где $g \in \mathrm{SL}_n$ переводит e_1 в e_i, а e_i в $-e_1$, оставляя все остальные базисные векторы на месте.

Мы заключаем, что произведения элементов вида gag^{-1}, $a \in A$, $g \in \mathrm{PSL}_n$ исчерпывают PSL_n.

Рассмотрим теперь отличную от единичной нормальную подгруппу $N \trianglelefteq \mathrm{PSL}_n$. Пространство $\mathbb{P}_{n-1}$ является дизъюнктным объединением орбит подгруппы N, и в силу нормальности N каждый элемент $g \in \mathrm{PSL}_n$ переводит N-орбиту точки x в N-орбиту точки gx, ибо

$$y = hx \iff gy = (ghg^{-1})gx\,.$$

Таким образом, группа PSL_n, с одной стороны, не может перевести пару точек, лежащих в одной N-орбите, в пару точек, лежащих в разных N-орбитах, а с другой стороны, действует 2-транзитивно по упр. 11.3 на стр. 189. Такое возможно, только если N-орбита всего одна, т. е. для любого $g \in \mathrm{PSL}_n$ существует такое $h \in N$, что $ge_1 = he_1$, откуда $h^{-1}g \in P$ и $g \in hP$. Мы заключаем, что $\mathrm{PSL}_n = NP = PN$. Поскольку сопряжение элементами из P оставляет подгруппу $A \lhd P$ на месте, каждый элемент из PSL_n является произведением элементов вида hah^{-1} с $a \in A$, $h \in N$ и в силу равенства $AN = NA$ лежит в AN. В прим. 10.23 на стр. 187 мы видели, что все группы SL_n за исключением двух, указанных в условии теоремы, совпадают со своими коммутантами. Но коммутатор элементов вида ah с $a \in A$, $h \in N$ в силу абелевости A и нормальности N лежит в N.

Упражнение 11.7. Убедитесь в этом.

Поэтому $\mathrm{PSL}_n = \mathrm{PSL}_n' = N$ во всех случаях, кроме двух исключительных. □

11.2. Композиционные факторы. Конечная строго убывающая последовательность подгрупп

$$G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \ldots \supsetneq G_{n-1} \supsetneq G_n = \{e\} \tag{11-3}$$

называется *композиционным рядом* или *рядом Жордана – Гёльдера* группы G, если при каждом i подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i и фактор G_i / G_{i+1} прост. В этой ситуации неупорядоченный набор простых групп G_i / G_{i+1} (в котором возможны повторения) называется набором *композиционных факторов* (или *факторов Жордана – Гёльдера*) группы G и обозначается $\mathrm{CF}(G)$, а число $n = |\,\mathrm{CF}(G)|$ называется *длиной* композиционного ряда (11-3) или группы G и обозначается $\mathrm{length}(G)$. В теор. 11.3 на стр. 191 ниже мы покажем, что набор композиционных факторов не зависит от выбора композиционного ряда, и тем самым $\mathrm{CF}(G)$ и $\mathrm{length}(G)$ корректно определены.

[1] См. упр. 10.33 на стр. 187.

Пример 11.1 (композиционные факторы S_4)
Выше мы видели, что симметрическая группа S_4 имеет композиционный ряд

$$S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \mathbb{Z}/(2) \rhd \{e\}\,,$$

в котором $A_4 \lhd S_4$ — подгруппа чётных перестановок, $V_4 \lhd A_4$ — подгруппа Клейна, состоящая из тождественной перестановки и трёх перестановок циклового типа $\yng(2,2)$, а

$$\mathbb{Z}/(2) \lhd V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$$

любая из трёх циклических подгрупп второго порядка, порождённых неединичными элементами. Таким образом, симметрическая группа S_4 имеет композиционные факторы $\mathbb{Z}/(2) = S_4/A_4$, $\mathbb{Z}/(3) = A_4/V_4$, $\mathbb{Z}/(2) = V_4/\big(\mathbb{Z}/(2)\big)$ и $\mathbb{Z}/(2) = \mathbb{Z}/(2)/\{e\}$.

Упражнение 11.8. Убедитесь, что $A_4/V_4 \simeq \mathbb{Z}/(3)$.

Теорема 11.3 (теорема Жордана – Гёльдера)
Если группа G имеет конечный композиционный ряд, то неупорядоченный набор $\mathrm{CF}(G)$ его факторов не зависит от выбора композиционного ряда. В частности, все ряды Жордана – Гёльдера имеют одинаковую длину $\mathrm{length}(G)$.

Доказательство. Пусть у группы G есть два композиционных ряда

$$G = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq P_2 \supsetneq \ldots \supsetneq P_{n-1} \supsetneq P_n = \{e\} \tag{11-4}$$
$$G = Q_0 \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \ldots \supsetneq Q_{m-1} \supsetneq Q_m = \{e\}\,. \tag{11-5}$$

Мы собираемся вставить между последовательными членами этих рядов дополнительные цепочки нестрого убывающих подгрупп так, чтобы получившиеся удлинённые ряды стали равной длины, и установить между их последовательными факторами биекцию, при которой соответствующие друг другу факторы будут изоморфны. Для этого заменим каждое звено $P_i \rhd P_{i+1}$ верхней цепочки (11-4) цепочкой

$$P_i \supseteq (Q_1 \cap P_i)P_{i+1} \supseteq (Q_2 \cap P_i)P_{i+1} \supseteq \ldots \supseteq (Q_{m-1} \cap P_i)P_{i+1} \supseteq P_{i+1}\,, \tag{11-6}$$

которая получается пересечением нижней цепочки (11-5) с подгруппой P_i и умножением всех полученных групп на нормальную в P_i подгруппу P_{i+1}. В предл. 10.5 на стр. 186 мы видели, что если подгруппа H нормализует подгруппу N, то $NH = HN$ тоже является подгруппой, причём $NH \rhd N$, $H \rhd (H \cap N)$ и $HN/N \simeq H/(H \cap N)$. Применяя это к подгруппам

$$H = Q_k \cap P_i \quad \text{и} \quad N = (Q_{k+1} \cap P_i)P_{i+1}\,,$$

мы получаем $HN = (Q_k \cap P_i)P_{i+1}$ и $H \cap N = (Q_{k+1} \cap P_i)(Q_k \cap P_{i+1})$.

Упражнение 11.9. Убедитесь, что H нормализует N, и проверьте последние два равенства.

Таким образом, $(Q_k \cap P_i)P_{i+1} \trianglerighteq (Q_{k+1} \cap P_i)P_{i+1}$ и

$$\frac{(Q_k \cap P_i)P_{i+1}}{(Q_{k+1} \cap P_i)P_{i+1}} \simeq \frac{(Q_k \cap P_i)}{(Q_{k+1} \cap P_i)(Q_k \cap P_{i+1})}\,. \tag{11-7}$$

Группа P_{i+1} является нормальной подгруппой во всех группах цепочки (11-6). Факторизуя по ней, получаем цепочку фактор групп

$$\frac{P_i}{P_{i+1}} \trianglerighteq \frac{(Q_1 \cap P_i)P_{i+1}}{P_{i+1}} \trianglerighteq \frac{(Q_2 \cap P_i)P_{i+1}}{P_{i+1}} \trianglerighteq \dots \trianglerighteq \frac{(Q_{m-1} \cap P_i)P_{i+1}}{P_{i+1}} \trianglerighteq \{e\}\,, \tag{11-8}$$

в которой каждая подгруппа нормальна в предыдущей, а последовательные факторы

$$\frac{(Q_k \cap P_i)P_{i+1}/P_{i+1}}{(Q_{k+1} \cap P_i)P_{i+1}/P_{i+1}} \simeq \frac{(Q_k \cap P_i)P_{i+1}}{(Q_{k+1} \cap P_i)P_{i+1}} \simeq \frac{(Q_k \cap P_i)}{(Q_{k+1} \cap P_i)(Q_k \cap P_{i+1})}$$

совпадают с (11-7). Так как группа P_i/P_{i+1} проста, мы заключаем, что в цепочке (11-8) имеется ровно одно нестрогое включение, а все остальные включения — равенства. Тем самым, ровно один из факторов (11-7) отличен от единицы и изоморфен P_i/P_{i+1}.

Те же самые рассуждения с заменой P на Q позволяют вставить между последовательными группами $Q_k \triangleright Q_{k+1}$ композиционного ряда (11-5) убывающую цепочку подгрупп

$$Q_k \supseteq (P_1 \cap Q_k)Q_{k+1} \supseteq (P_2 \cap Q_k)Q_{k+1} \supseteq \dots \supseteq (P_{n-1} \cap Q_k)Q_{k+1} \supseteq Q_{k+1}\,, \tag{11-9}$$

каждая из которых нормальна в предыдущей, а последовательные факторы имеют вид

$$\frac{(P_i \cap Q_k)Q_{k+1}}{(P_{i+1} \cap Q_k)Q_{k+1}} \simeq \frac{(P_i \cap Q_k)}{(P_{i+1} \cap Q_k)(P_i \cap Q_{k+1})} \tag{11-10}$$

и изоморфны соответствующим факторам (11-7), поскольку

$$(P_{i+1} \cap Q_k)(P_i \cap Q_{k+1}) = (Q_{k+1} \cap P_i)(Q_k \cap P_{i+1})\,,$$

так как заключённые в скобки пересечения нормализуют друг друга. Таким образом, вставляя между последовательными элементами композиционного ряда (11-4) цепочки (11-6), а между последовательными элементами ряда (11-5) — цепочки (11-9), мы получим ряды одинаковой длины, в которых не все включения строгие, но факторы находятся в биективном соответствии, сопоставляющем друг другу изоморфные факторы (11-10) и (11-7). Поскольку Q_{k+1} является нормальной подгруппой всех групп цепочки (11-9), те же аргументы, что применялись выше к подгруппе P_{i+1} и цепочке (11-6), показывают, что при фиксированном k среди факторов (11-10) имеется ровно один отличный от единицы, и он изоморфен Q_k/Q_{k+1}. □

Замечание 11.1. Непростая группа может иметь несколько разных композиционных рядов с одинаковым набором факторов, а группы с одинаковыми наборами факторов Жордана-Гёльдера не обязательно изоморфны.

Предложение 11.1
Если группа G обладает конечным композиционным рядом, то любая её нормальная подгруппа $N \triangleleft G$ и факторгруппа G/N тоже обладают конечными композиционными рядами, причём $\mathrm{CF}(G) = \mathrm{CF}(N) \sqcup \mathrm{CF}(G/N)$. В частности, $\mathrm{length}(G) = \mathrm{length}(N) + \mathrm{length}(G/N)$.

Доказательство. Пересечение композиционного ряда группы G с подгруппой $N \triangleleft G$ имеет вид

$$N \supseteq G_1 \cap N \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \cap N \supseteq \{e\}\,, \tag{11-11}$$

где $(G_i \cap N) \rhd (G_{i+1} \cap N)$, так как $G_i \rhd G_{i+1}$. Согласно предл. 10.5 на стр. 186,

$$\frac{G_i \cap N}{G_{i+1} \cap N} = \frac{G_i \cap N}{(G_i \cap N) \cap G_{i+1}} \simeq \frac{(G_i \cap N)G_{i+1}}{G_{i+1}} .$$

Поскольку $G_i \trianglerighteq (G_i \cap N)G_{i+1} \trianglerighteq G_{i+1}$ и фактор G_i / G_{i+1} прост, одно включение строгое, другое — равенство. Если $(G_i \cap N)G_{i+1} = G_i$, то $(G_i \cap N)/(G_{i+1} \cap N) \simeq G_i / G_{i+1}$. Если $(G_i \cap N)G_{i+1} = G_{i+1}$, то $G_i \cap N = G_{i+1} \cap N$. Таким образом, убирая из цепочки (11-11) все равенства, получаем ряд Жордана – Гёльдера, факторы которого содержатся среди композиционных факторов группы G. Аналогично, применяя к композиционному ряду группы G эпиморфизм $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$, получаем цепочку $G / N \trianglerighteq \pi(G_1) \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \pi(G_{n-1}) \trianglerighteq \{e\}$, в которой

$$\frac{\pi(G_i)}{\pi(G_{i+1})} \simeq \frac{\pi^{-1}(\pi(G_i))}{\pi^{-1}(\pi(G_{i+1}))} = \frac{G_i N}{G_{i+1}N} \simeq \frac{G_i}{G_i \cap (G_{i+1}N)} = \frac{G_i}{G_{i+1}(G_i \cap N)} = \frac{G_i}{(G_i \cap N)G_{i+1}}$$

и возникает противоположная альтернатива: если $(G_i \cap N)G_{i+1} = G_i$, то $\pi(G_i) = \pi(G_{i+1})$, а если $(G_i \cap N)G_{i+1} = G_{i+1}$, то $\pi(G_i)/\pi(G_{i+1}) \simeq G_i / G_{i+1}$. Поэтому, убирая из цепочки равенства, получаем композиционный ряд для группы G/N, факторы которого суть композиционные факторы группы G, не вошедшие в набор композиционных факторов подгруппы $N \lhd G$. □

Предложение 11.2

Если нормальная подгруппа $N \lhd G$ и факторгруппа $Q = G/N$ имеют конечные длины, то группа G тоже имеет конечную длину, и $\operatorname{length}(G) = \operatorname{length}(N) + \operatorname{length}(Q)$, $\operatorname{CF}(G) = \operatorname{CF}(N) \sqcup \operatorname{CF}(Q)$.

Доказательство. Пусть группы N и Q имеют композиционные ряды

$$N \rhd N_1 \rhd \ldots \rhd N_{n-1} \rhd \{e\}$$
$$Q \rhd Q_1 \rhd \ldots \rhd Q_{m-1} \rhd \{e\} .$$

Обозначим через $P_i = \pi^{-1}(Q_i)$ полный прообраз группы Q_i при гомоморфизме факторизации $\pi : G \twoheadrightarrow Q$ с ядром N. Цепочка подгрупп

$$G \rhd P_1 \rhd \ldots \rhd P_{m-1} \rhd N_1 \rhd \ldots \rhd N_{n-1} \rhd \{e\}$$

является рядом Жордана – Гёльдера с требуемыми свойствами. □

Следствие 11.1

Каждая конечная группа обладает конечным композиционным рядом. □

Упражнение 11.10. Постройте композиционный ряд аддитивной группы $\mathbb{Z}/(p^n)$, где p — простое.

11.3. Полупрямые произведения. Для пары подгрупп N, H группы G отображение

$$N \times H \to NH , \quad (x, h) \mapsto xh ,$$

биективно если и только если $N \cap H = \{e\}$. В самом деле, при $x_1 h_1 = x_2 h_2$ элемент

$$x_2^{-1} x_1 = h_2 h_1^{-1} \in N \cap H ,$$

и если $N \cap H = \{e\}$, то $x_2 = x_1$ и $h_2 = h_1$, а если в $N \cap H$ есть элемент $z \neq e$, то разные пары (e, e), $(z, z^{-1}) \in N \times H$ перейдут в один и тот же элемент $e \in NH$. Будем называть подгруппы $N, H \subset G$ *дополнительными*, если $N \cap H = \{e\}$ и $NH = G$. В этом случае группа G как множество находится в биекции с прямым произведением $N \times H$. Если подгруппа $N \lhd G$ при этом нормальна, то композиция элементов $g_1 = x_1 h_1$ и $g_2 = x_2 h_2$ может быть выражена в терминах пар (x_1, h_1), $(x_2, h_2) \in N \times H$. А именно, так как

$$g_1 g_2 = x_1 h_1 x_2 h_2 = x_1 (h_1 x_2 h_1^{-1}) \cdot h_1 h_2 \quad \text{и} \quad h_1 x_2 h_1^{-1} \in N\,,$$

группу G можно *описать* как множество $N \times H$ с операцией

$$(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) = (x_1 \operatorname{Ad}_{h_1}(x_2), h_1 h_2)\,, \tag{11-12}$$

где через $\operatorname{Ad}_h : N \xrightarrow{\sim} N$, $x \mapsto hxh^{-1}$, обозначено присоединённое действие элемента h на нормальной подгруппе N. В этой ситуации говорят, что группа G является *полупрямым произведением* нормальной подгруппы $N \lhd G$ и дополнительной к ней подгруппы $H \subset G$ и пишут $G = N \rtimes H$. Если сопряжение элементами из подгруппы H действует на подгруппе N тривиально, что равносильно перестановочности $xh = xh$ любых двух элементов $x \in N$ и $h \in H$, то полупрямое произведение называется *прямым*. В этом случае $(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) = (x_1 x_2, h_1 h_2)$ для всех пар (x_1, h_1), $(x_2, h_2) \in N \times H$.

Пример 11.2 ($D_n = \mathbb{Z}/(n) \rtimes \mathbb{Z}/(2)$)
Группа диэдра D_n содержит нормальную подгруппу поворотов, изоморфную аддитивной группе $\mathbb{Z}/(n)$. Подгруппа второго порядка, порождённая любым отражением, дополнительна к группе поворотов и изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}/(2)$. Присоединённое действие отражения на группе поворотов меняет знак у угла поворота. При отождествлении группы поворотов с $\mathbb{Z}/(n)$ это действие превращается в умножение на -1. Таким образом, $D_n = \mathbb{Z}/(n) \rtimes \mathbb{Z}/(2)$ и в терминах пар $(x, y) \in \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(2)$ композиция на группе диэдра задаётся правилом

$$\big(x_1, y_1\big) \cdot \big(x_2, y_2\big) = \big(x_1 + (-1)^{y_1} x_2, y_1 + y_2\big)\,, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/(n)\,, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{Z}/(2)\,.$$

Пример 11.3 ($\operatorname{Aff}(V) = V \rtimes \operatorname{GL}(V)$, продолжение прим. 10.20 на стр. 184)
Аффинная группа[1] $\operatorname{Aff}(V)$ содержит нормальную подгруппу параллельных переносов, которая изоморфна аддитивной группе векторного пространства V и является ядром сюрьективного гомоморфизма групп

$$D : \operatorname{Aff}(V) \twoheadrightarrow \operatorname{GL}(V)\,, \quad \varphi \mapsto D_\varphi\,, \tag{11-13}$$

сопоставляющего аффинному преобразованию $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ его дифференциал

$$D_\varphi : V \to V\,, \quad \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}\,.$$

Если зафиксировать в $\mathbb{A}(V)$ какую-нибудь точку p, то ограничение гомоморфизма (11-13) на стабилизатор $\operatorname{Stab}_p \subset \operatorname{Aff}(V)$ задаст изоморфизм $D_p : \operatorname{Stab}_p \xrightarrow{\sim} \operatorname{GL}(V)$. Обратный изоморфизм сопоставляет линейному оператору $f : V \xrightarrow{\sim} V$ аффинное преобразование

$$\varphi_f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)\,, \quad x \mapsto p + f(\overrightarrow{px})\,,$$

оставляющее на месте точку p. Поскольку каждое преобразование $\varphi \in \operatorname{Aff}(V)$ раскладывается в композицию $\varphi = \tau_v \circ (\tau_{-v} \circ \varphi)$ параллельного переноса τ_v на вектор $v = \overrightarrow{p\varphi(p)}$ и преобразования $\tau_{-v} \circ \varphi \in \operatorname{Stab}(p)$, группа $\operatorname{Aff}(V) = V \rtimes \operatorname{Stab}_p \simeq V \rtimes \operatorname{GL}(V)$. Согласно прим. 10.20 на стр. 184, композиция в группе $V \rtimes \operatorname{GL}(V)$ задаётся правилом $(u, f) \cdot (w, g) = (u + f(w),\ fg)$.

[1]См. прим. 10.20 на стр. 184.

11.3.1. Полупрямое произведение групп. Предыдущую конструкцию можно применить к двум абстрактным группам N и H как только задано действие группы H на группе N, т. е. гомоморфизм группы H в группу автоморфизмов группы N:

$$\psi : H \to \operatorname{Aut} N\,, \quad h \mapsto \psi_h : N \xrightarrow{\sim} N\,, \tag{11-14}$$

По аналогии с форм. (11-12) на стр. 194 зададим на множестве $N \times H$ операцию правилом

$$(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 \psi_{h_1}(x_2), h_1 h_2)\,. \tag{11-15}$$

Упражнение 11.11. Проверьте, что формула (11-15) задаёт на $N \times H$ структуру группы с единицей (e, e) и обращением $(x, h)^{-1} = \left(\psi_h^{-1}(x^{-1}), h^{-1}\right)$, где $\psi_h^{-1} = \psi_{h^{-1}}$ — автоморфизм, обратный к $\psi_h : N \xrightarrow{\sim} N$.

Полученная таким образом группа называется *полупрямым произведением* групп N и H по действию $\psi : H \to \operatorname{Aut} N$ и обозначается $N \rtimes_\psi H$. Подчеркнём, что результат зависит от выбора действия ψ. Если действие тривиально, т. е. $\psi_h = \mathrm{Id}_N$ для всех $h \in H$, мы получаем прямое произведение $N \times H$ с покомпонентными операциями.

Упражнение 11.12. Убедитесь, что подмножество $N' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, e) \mid x \in N\}$ является изоморфной группе N нормальной подгруппой в $G = N \rtimes_\psi H$ и фактор $G / N' \simeq H$, а подмножество $H' \stackrel{\text{def}}{=} \{(e, h) \mid h \in H\}$ является изоморфной H и дополнительной к N' подгруппой в G, причём $G = N' \rtimes H'$ является полупрямым произведением своих подгрупп N' и H'.

Предложение 11.3

Для любых гомоморфизма $\psi : H \to \operatorname{Aut}(N)$, $h \mapsto \psi_h$, и автоморфизмов $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H$ и $\beta : N \xrightarrow{\sim} N$ отображения $(n, h) \mapsto (n, \alpha^{-1} h)$ и $(n, h) \mapsto (\beta n, h)$ задают изоморфизмы полупрямых произведений $N \rtimes_\psi H \xrightarrow{\sim} N \rtimes_{\psi\circ\alpha} H$ и $N \rtimes_\psi H \xrightarrow{\sim} N \rtimes_{\mathrm{Ad}_\beta(\psi)} H$, где $\mathrm{Ad}_\beta(\psi) : H \to \operatorname{Aut}(N)$, $h \mapsto \beta \psi_h \beta^{-1}$.

Доказательство. Отображение $(n, h) \mapsto (n, \alpha^{-1} h)$ переводит сомножители из левой части равенства $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \psi_{h_1} n_2, h_1 h_2)$ в $(n_1, \alpha^{-1} h_1)$ и $(n_2, \alpha^{-1} h_2)$, произведение которых в $N \rtimes_{\psi\circ\alpha} H$ равно $(n_1 \psi_{h_1} n_2, \alpha^{-1}(h_1 h_2))$. Отображение $(n, h) \mapsto (\beta n, h)$ переводит те же самые сомножители в $(\beta n_1, h_1)$ и $(\beta n_2, h_2)$. Их произведение в $N \rtimes_{\mathrm{Ad}_\beta(\psi)} H$ равно $(\beta(n_1 \psi_{h_1} n_2), h_1 h_2)$. □

Пример 11.4 (голоморф)

Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ произвольной группы G тавтологически действует на G. Полупрямое произведение $\operatorname{Hol} G \stackrel{\text{def}}{=} G \rtimes \operatorname{Aut} G$ по этому действию называется *голоморфом* группы G. Вложение $G \hookrightarrow \operatorname{Hol} G$ замечательно тем, что любой автоморфизм группы G является сужением на G внутреннего автоморфизма объемлющей группы $\operatorname{Hol} G$.

Пример 11.5 (сплетение)

Для любых двух групп H, N множество N^H всех функций $f : H \to N$ имеет естественную структуры группы, в которой $f_1 f_2 : H \to N$, $x \mapsto f_1(x) f_2(x)$. Эту группу можно воспринимать как прямое произведение одинаковых копий группы N, занумерованных элементами[1] $x \in H$. Группа H действует на N^H по следующему правилу: элемент $h \in H$ переводит функцию $f : H \to N$ в функцию $hf : x \mapsto f(xh)$.

Упражнение 11.13. Убедитесь, что $h(f_1 f_2) = (hf_1)(hf_2)$ и $(h_1 h_2) f = h_1(h_2 f)$.

[1] Ср. с n° 1.6 на стр. 34.

Полупрямое произведение $N \wr H \overset{\text{def}}{=} N^H \rtimes H$ по этому действию называется *сплетением*[1] группы N с группой H. Сплетение замечательно тем, что любая группа G с нормальной подгруппой $N \lhd G$ и фактор группой $H = G/N$ допускает гомоморфное *вложение Фробениуса* $\varphi : G \hookrightarrow N \wr H$. Чтобы задать его, зафиксируем какое-нибудь теоретико множественное сечение $\sigma : H \hookrightarrow G$ гомоморфизма факторизации $\pi : G \twoheadrightarrow H = G/N$, выбирающее в каждом классе $h \in G/N$ некоторый представитель $\sigma(h) \in G$. Тогда для любых $g \in G$ и $h \in H$ элемент $\sigma(h)g\sigma(h\pi(g))^{-1} \in N$, поскольку $\pi(\sigma(h)g\sigma(h\pi(g))^{-1}) = h\pi(g)(h\pi(g))^{-1} = e$. Рассмотрим функцию

$$\sigma_g : H \to N\,, \quad h \mapsto \sigma(h)g\sigma(h\pi(g))^{-1}\,,$$

как элемент группы N^H и положим $\varphi_\sigma(g) = (\sigma_g, \pi(g)) \in N^H \rtimes H$.

Упражнение 11.14. Убедитесь, что $\varphi_\sigma(g_1g_2) = \varphi_\sigma(g_1)\varphi_\sigma(g_2)$ в $N^H \rtimes H$ и что образы двух вложений $\varphi_\sigma, \varphi_\tau : G \hookrightarrow N \wr H$, построенных при помощи разных сечений $\sigma, \tau : H \hookrightarrow G$, сопряжены в группе $N \wr H$.

11.4. p-группы и теоремы Силова. Группа порядка p^n, где $p \in \mathbb{N}$ — простое, называется *p-группой*. Поскольку все нетривиальные подгруппы p-группы также являются p-группами, длина любой орбиты p-группы при любом её действии на любом множестве либо делится на p, либо равна единице. Мы получаем простое, но полезное

Предложение 11.4
Пусть p-группа G действует на конечном множестве X, число элементов в котором не делится на p. Тогда G имеет на X неподвижную точку. □

Предложение 11.5
Любая p-группа имеет нетривиальный центр.

Доказательство. Рассмотрим присоединённое действие группы на себе. Центр группы является множеством одноточечных орбит этого действия. Так как число элементов в группе и длины всех неодноточечных орбит делятся на p, одноточечные орбиты не могут исчерпываться одной орбитой элемента e. □

Упражнение 11.15. Покажите, что любая группа G порядка p^2, где p простое, абелева.

Определение 11.1 (силовские подгруппы)
Пусть G — произвольная конечная группа. Запишем её порядок в виде $|G| = p^n m$, где p — простое, $n \geqslant 1$, и m взаимно просто с p. Всякая подгруппа $S \subset G$ порядка $|S| = p^n$ называется *силовской p-подгруппой* в G. Количество силовских p-подгрупп в G обозначается через $N_p(G)$.

Теорема 11.4 (теорема Силова)
Для любого простого $p \mid |G|$ силовские p-подгруппы в G существуют. Все они сопряжены друг другу, и любая p-подгруппа в G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.

Доказательство (Ж.-П. Серр). Пусть $|G| = p^n m$ и $p \nmid m$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество p^n-элементных подмножеств в G и рассмотрим действие G на $\mathcal{E}$, индуцированное левым регулярным действием G на себе. Стабилизатор точки $F \in \mathcal{E}$ состоит из всех элементов $g \in G$, левое

[1] По английски *wreath product*.

умножение на которые переводит множество $F \subset G$ в себя: $\mathrm{Stab}(F) = \{g \in G \mid gF \subset F\}$. Так как $gx = x$ в группе G только при $g = e$, группа $\mathrm{Stab}(F)$ свободно действует на множестве F и все орбиты этого действия состоят из $|\mathrm{Stab}(F)|$ точек. Поэтому $|F| = p^n$ делится на $|\mathrm{Stab}(F)|$, откуда $|\mathrm{Stab}(F)| = p^k$, и имеется следующая альтернатива: либо $k < n$, и в этом случае длина G-орбиты элемента $F \in \mathcal{E}$ делится на p, либо $k = n$, и в этом случае подгруппа $\mathrm{Stab}(F) \subset G$ силовская, а G-орбита элемента $F \in \mathcal{E}$ состоит из m элементов. Во втором случае по предл. 11.4 каждая p-подгруппа $H \subset G$ (в частности, каждая силовская подгруппа), имеет на G-орбите элемента F неподвижную точку gF, а значит, содержится в силовской подгруппе $\mathrm{Stab}(gF) = g\,\mathrm{Stab}(F)\,g^{-1}$, сопряжённой к $\mathrm{Stab}(F)$, и совпадает с ней, если H силовская. Таким образом, для доказательства теоремы остаётся убедиться, что в множестве $\mathcal{E}$ есть G-орбита, длина которой не делится на p. Это следует из лем. 11.1 ниже. □

Лемма 11.1
$|\mathcal{E}| = \binom{p^n m}{p^n} \equiv m \pmod p$ не делится на p.

Доказательство. Класс вычетов $\binom{p^n m}{p^n} \pmod p$ равен коэффициенту при x^{p^n}, возникающему при раскрытии бинома $(1+x)^{p^n m}$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. Так как над $\mathbb{F}_p$ возведение в p-тую степень является аддитивным гомоморфизмом, $(1+x)^{p^n} = 1 + x^{p^n}$, откуда $(1+x)^{p^n m} = \left(1 + x^{p^n}\right)^m = 1 + mx^{p^n} +$ старшие степени. □

Следствие 11.2 (дополнение к теореме Силова)
В условиях теоремы Силова число N_p силовских p-подгрупп в G делит m и сравнимо с единицей по модулю p.

Доказательство. Обозначим множество силовских p-подгрупп в G через $\mathcal{S}$ и рассмотрим действие G на $\mathcal{S}$, индуцированное присоединённым действием G на себе. По теореме Силова это действие транзитивно, откуда $|\mathcal{S}| = |G|/|\mathrm{Stab}(P)|$, где $P \in \mathcal{S}$ — произвольно взятая силовская p-подгруппа. Поскольку $P \subset \mathrm{Stab}(P)$, порядок $|\mathrm{Stab}(P)|$ делится на $|P| = p^n$, а значит $|\mathcal{S}|$ делит $|G|/p^n = m$, что доказывает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что P, действуя сопряжениями на $\mathcal{S}$, имеет там ровно одну неподвижную точку, а именно, саму себя. Тогда порядки всех остальных P-орбит будут делиться на p, и мы получим $|\mathcal{S}| \equiv 1 \pmod p$.

Пусть силовская подгруппа $H \in \mathcal{S}$ неподвижна при сопряжении подгруппой P. Это означает, что $P \subset \mathrm{Stab}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\}$ и $|\mathrm{Stab}(H)| = p^n m'$, где $m'|m$ взаимно просто с p. Так как $H \subset \mathrm{Stab}(H)$, подгруппы P и H являются силовскими в $\mathrm{Stab}(H)$. Поскольку H нормальна в $\mathrm{Stab}(H)$, и все силовские подгруппы сопряжены, мы заключаем, что $H = P$. □

Пример 11.6 (группы порядка pq с простыми $p > q$)
Пусть $|G| = pq$, где $p > q$ простые. Тогда в G есть ровно одна, автоматически нормальная силовская p-подгруппа $H_p \simeq \mathbb{Z}/(p)$. Рассмотрим любую силовскую q-подгруппу $H_q \simeq \mathbb{Z}/(q)$. Поскольку H_p и H_q просты, $H_p \cap H_q = e$ и $G = H_p H_q$. Согласно n° 11.3 $G = \mathbb{Z}/(p) \rtimes_\psi \mathbb{Z}/(q)$ для некоторого гомоморфизма $\psi : \mathbb{Z}/(q) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p))$.

Упражнение 11.16. Убедитесь, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p)) \simeq \mathbb{F}_p^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)$.

Гомоморфизм $\psi : \mathbb{Z}/(q) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p)) \simeq \mathbb{F}_p^\times$ однозначно задаётся своим значением на образующей $[1]_q$, которая является элементом порядка q. Поэтому элемент $\eta = \psi([1]_q) \in \boldsymbol{\mu}_q(\mathbb{F}_p) \subset \mathbb{F}_p^\times$

является корнем q-й степени из 1 в поле $\mathbb{F}_p$. По упр. 11.4 на стр. 189 группа $\boldsymbol{\mu}_q(\mathbb{F}_p)$ циклическая порядка нод$(q, p-1)$. Мы заключаем, что если $q \nmid (p-1)$, то всякий гомоморфизм $\mathbb{Z}/(q) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p))$ тривиален и, стало быть, единственной группой порядка pq в этом случае является $\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(q)$. Если же $q \mid (p-1)$, то существует нетривиальный гомоморфизм

$$\psi : \ \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p)), \quad [1]_q \mapsto \eta, \tag{11-16}$$

где $\eta \in \mathbb{F}_p^\times$ порождает мультипликативную группу $\boldsymbol{\mu}_q(\mathbb{F}_p)$. Гомоморфизм (11-16) сопоставляет каждому элементу $[y]_q \in \mathbb{Z}/(q)$ автоморфизм $\psi_y : \mathbb{Z}/(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(p)$, $[x]_p \mapsto [\eta^y x]_p$, и задаёт полупрямое произведение $\mathbb{Z}/(p) \rtimes_\psi \mathbb{Z}/(q)$ с операцией

$$\big([x_1]_p, [y_1]_q\big) \cdot \big([x_2]_p, [y_2]_q\big) = \big([x_1 + \eta^{y_1} x_2]_p, [y_1 + y_2]_q\big). \tag{11-17}$$

Любой другой нетривиальный гомоморфизм $\mathbb{Z}/(q) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p))$ имеет вид $\psi^m : [1]_q \mapsto \eta^m$, где $1 \leqslant m \leqslant q-1$, и является композицией гомоморфизма (11-16) с автоморфизмом умножения на $m : \mathbb{Z}/(q) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(q)$, $[y]_q \mapsto [my]_q$. По предл. 11.3 на стр. 195 задаваемое им полупрямое произведение $\mathbb{Z}/(p) \rtimes_{\psi \circ m} \mathbb{Z}/(q) \simeq \mathbb{Z}/(p) \rtimes_\psi \mathbb{Z}/(q)$. Мы заключаем, что при $q \mid (p-1)$ кроме абелевой группы $\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(q)$ существует единственная с точностью до изоморфизма неабелева группа порядка pq. Она изоморфна $\mathbb{Z}/(p) \rtimes \mathbb{Z}/(q)$ с операцией (11-17). В частности, для простого $p > 2$ единственной с точностью до изоморфизма неабелевой группой порядка $2p$ является группа диэдра[1] D_p.

[1]См. прим. 11.2 на стр. 194.

Упр. 11.1. Пусть $g \in A_n$, $h \in S_n \smallsetminus A_n$. Всякая перестановка, сопряжённая g в S_n, сопряжена в A_n либо g, либо $\mathrm{Ad}_h\, g$. Равенство $\mathrm{Ad}_p\, g = \mathrm{Ad}_h\, g$ равносильно равенству $\mathrm{Ad}_{p^{-1}h}\, g = g$. Поэтому существование чётной перестановки p удовлетворяющей первому равенству равносильно существованию нечётной перестановки $p^{-1}h$, коммутирующей с g, т. е. класс сопряжённости перестановки g в S_n не распадается на два класса сопряжённости в A_n если и только если централизатор $Z(g)$ содержит нечётную перестановку. Когда в цикловом типе g есть строка чётной длины или две строки одинаковой нечётной длины, то такая перестановка есть, а если g является произведением попарно разных циклов нечётной длины, то — нет.

Упр. 11.2. Правая часть равенства $|H| = 12\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2 + 20\varepsilon_3 + 15\varepsilon_4 + 1$, приведённая по модулям 2, 3 и 5, равна, соответственно, $1 + \varepsilon_4$, $1 - \varepsilon_3$ и $1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Она делится на 2 или на 3 только если $\varepsilon_4 = 1$ или $\varepsilon_3 = 1$. В обоих случаях $|H| \geqslant 16$, так что $|H| \neq 2,\ 3,\ 4,\ 3 \cdot 2,\ 3 \cdot 4$. Если $|H|$ делится на 5, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и $|H| \geqslant 25$, так что $|H| \neq 5,\ 2 \cdot 5,\ 3 \cdot 5,\ 4 \cdot 5$. Если $|H|$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5$, то все $\varepsilon_i = 1$ и $|H| = 60$. Последняя возможность: $|H| = 1$.

Упр. 11.3. Чтобы перевести одномерные подпространства, порождённые непропорциональными векторами e_1, e_2, в одномерные подпространства, порождённые непропорциональными векторами v_1, v_2, дополним эти пары векторов до базисов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Матрица перехода $C_{\boldsymbol{ee}}$ имеет ненулевой определитель δ. Умножая её первый столбец на δ^{-1} получаем матрицу $F \in \mathrm{SL}_n$. Оператор $x \mapsto Fx$ переводит e_1 в $\delta^{-1}v_1$, а e_2 в v_2.

Упр. 11.4. Пусть $1 \leqslant k \leqslant m$. Класс $[k] \in \mathbb{Z}/(m)$ удовлетворяет уравнению $n[k] = 0$ если и только если $m \mid kn$. Полагая $m = \mu$ нод(m, n), $n = \nu$ нод(m, n), где нод$(\mu, \nu) = 1$, заключаем, что $m \mid kn$ если и только если $\mu \mid k$, откуда $k = i\mu$, где $i = 1, \dots,$ нод(m, n).

Упр. 11.7. $a_1n_1a_2n_2n_1^{-1}a_1^{-1}n_2^{-1}a_2^{-1} = (a_1n_1a_1^{-1})(a_1a_2n_2n_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1})(a_2n_2^{-1}a_2^{-1})$. Так как N нормальна, а A абелева, заключённые в скобки слагаемые лежат в N.

Упр. 11.8. При эпиморфизме S_4 на группу треугольника из прим. 10.9 подгруппа чётных перестановок $A_4 \subset S_4$ переходит в группу вращений треугольника.

Упр. 11.9. Не вполне очевидно, разве что последнее равенство

$$(Q_k \cap P_i) \cap ((Q_{k+1} \cap P_i)P_{i+1}) = (Q_{k+1} \cap P_i)(Q_k \cap P_{i+1})\,.$$

Левая часть содержит правую, поскольку $Q_{k+1}Q_k \subset Q_k$ и $P_iP_{i+1} \subset P_i$. Правая часть содержит левую, так как если элемент $c \in Q_k \cap P_i$ имеет вид $c = ab$, где $a \in Q_{k+1} \cap P_i$, $b \in P_{i+1}$, то $b = a^{-1}c$ лежит в Q_k, а значит, и в $Q_k \cap P_{i+1}$.

Упр. 11.10. $\mathbb{Z}/(p^n) \supsetneq A_1 \supsetneq \dots \supsetneq A_{n-1} \supsetneq 0$, где $A_k = \{[zp^{k-1}] \in \mathbb{Z}/(p^n) \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Упр. 11.11. Проверка ассоциативности:

$$\begin{gathered}\big((x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2)\big) \cdot (x_3, h_3) = \big(x_1\psi_{h_1}(x_2)\,,\ h_1h_2\big) \cdot (x_3, h_3) = \big(x_1\psi_{h_1}(x_2)\psi_{h_1h_2}(x_3)\,,\ h_1h_2h_3\big)\\ (x_1, h_1) \cdot \big((x_2, h_2) \cdot (x_3, h_3)\big) = (x_1, h_1) \cdot \big(x_2\psi_{h_2}(x_3)\,,\ h_2h_3\big) = \Big(x_1\psi_{h_1}\big(x_2\psi_{h_2}(x_3)\big)\,,\ h_1h_2h_3\Big)\,.\end{gathered}$$

Но $\psi_{h_1}\big(x_2\psi_{h_2}(x_3)\big) = \psi_{h_1}(x_2)\psi_{h_1} \circ \psi_{h_2}(x_3) = \psi_{h_1}(x_2)\psi_{h_1h_2}(x_3)$. Существование единицы:

$$(x, h) \cdot (e, e) = (x, \psi_h(e), he) = (x, h)\,,$$

поскольку $\psi_h(e) = e$ в силу того, что ψ_h гомоморфизм. Существование обратного:

$$\left(\psi_h^{-1}(x^{-1})\,,\ h^{-1}\right) \cdot (x,h) = \left(\psi_h^{-1}(x^{-1})\psi_h^{-1}(x^{-1})\,,\ h^{-1}h\right) = (e,e)\,.$$

Упр. 11.12. Так как $\psi\colon\ H \to \operatorname{Aut} N$ — гомоморфизм, $\psi_e = \mathrm{Id}_N$ и

$$(x_1,e)\cdot(x_2,e) = (x_1\psi_e(x_2),e) = (x_1x_2,e)\,,$$

т. е. элементы (x,e) образуют подгруппу, изоморфную N. Она нормальна, поскольку

$$(y,h)\cdot(x,e)\cdot\left(\psi_h^{-1}(y^{-1}),h^{-1}\right) = (y\psi_h(x),h)\cdot\left(\psi_h^{-1}(y^{-1}),h^{-1}\right) = \left(y\psi_h(x)y^{-1},e\right)\,.$$

Элементы (e,h) очевидно образуют дополнительную подгруппу, изоморфную H, и

$$\mathrm{Ad}_{(e,h)}(x,e) = (\psi_h(x),e)\,.$$

Упр. 11.15. Пусть центр $Z(G) = C$. Если $|C| = p$, то $C \simeq \mathbb{Z}/(p) \simeq G\,/\,C$. Пусть $a \in C$ — образующая центра, а $b \in G$ — такой элемент, что смежный класс bC является образующей в $G\,/\,C$. Тогда любой элемент группы имеет вид $b^k a^m$. Так как a централен, любые два таких элемента коммутируют.

Упр. 11.16. Аддитивные автоморфизмы группы $\mathbb{Z}/(p)$ суть линейные автоморфизмы одномерного векторного пространства над полем $\mathbb{F}_p$. Они образуют группу $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p^\times$ ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_p$ по умножению. Как и всякая конечная мультипликативная подгруппа поля, она циклическая[1].

[1] См. сл. 2.3 на стр. 52.